DISSERTATION

Mathematisches Denken im Physikunterricht

Theorieentwicklung und Problemanalyse

zur Erlangung des akademischen Grades Doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

Olaf Uhden

Gutachter:
Prof. Dr. Gesche Pospiech (TU Dresden)
Prof. Dr. Dietmar Höttecke (Universität Hamburg)

Verteidigt am 28. Juni 2012
an der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Dresden

Die Dissertation erscheint als Band 133 der Reihe
„Studien zum Physik- und Chemielernen“
im Logos Verlag Berlin und kann online über die
ISBN 978-3-8325-3200-0
oder direkt beim Logos Verlag bestellt werden:
http://www.logos-verlag.de

Europa fördert Sachsen.
ESF
Europäischer Sozialfonds
SACHSEN

Das Projekt wurde aus Mitteln des Europäischen Sozialfonds (ESF)
und des Freistaates Sachsen gefördert.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Mathematik in Physik und Physikunterricht

> [...] it is impossible to explain honestly the beauties of the laws of nature in a way that people can feel, without their having some deep understanding of mathematics. (Feynman, 1985, S. 39 f.)

> Nach unserer bisherigen Erfahrung sind wir nämlich zum Vertrauen berechtigt, dass die Natur die Realisierung des mathematisch denkbar Einfachsten ist. Durch rein mathematische Konstruktion vermögen wir nach meiner Überzeugung diejenigen Bergriffe und diejenige gesetzliche Verknüpfung zwischen ihnen zu finden, die den Schlüssel für das Verstehen der Naturerscheinungen liefern. Die brauchbaren mathematischen Begriffe können durch Erfahrung wohl nahegelegt, aber keinesfalls aus ihr abgeleitet werden. Erfahrung bleibt natürlich das einzige Kriterium der Brauchbarkeit einer mathematischen Konstruktion für die Physik. Das eigentlich schöpferische Prinzip liegt aber in der Mathematik. (Einstein, 1934, S. 117)

Die besondere Bedeutung der Mathematik für die Physik ist seit jeher Gegenstand von Äußerungen prominenter Physiker[1]. Kennzeichnend für die meisten Aussagen ist die Betonung der engen Verflechtung beider Disziplinen und der Möglichkeit, durch die Mathematik die Physik zu *verstehen*. Die Mathematik wird nicht als externes Hilfsmittel zum Quantifizieren und Rechnen angesehen, sondern in ihrer strukturierenden und inhaltstragenden Funktion als essentieller Teil der Physik hervorgehoben.

Die enge Verbindung von Mathematik und Physik kommt im gesamten Spektrum physikalischen Arbeitens unterschiedlich stark zum Tragen. Die Experimentalphysiker sind vorrangig mit dem Konzipieren, Durchführen und Auswerten von Experimenten beschäf-

1 Zur besseren Lesbarkeit werden Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler als Wissenschaftler, Lehrerinnen und Lehrer als Lehrer und Schülerinnen und Schüler als Schüler bezeichnet.

tigt. Hierbei leisten sie zwar auch Beiträge zur Theorieentwicklung und machen intensiven Gebrauch von mathematischen Methoden, allerdings wird die Mathematik eher als Hilfsmittel eingesetzt, mit dem Ergebnisse und Zusammenhänge quantifiziert und überprüft werden können. Die Arbeit theoretischer Physiker dagegen ist von Grund auf mathematisch. Sie versuchen, die physikalischen Zusammenhänge mittels mathematischer Modelle zu beschreiben, welche sie dann analytisch und numerisch weiter untersuchen. Hier kommt im Sinne Einsteins der kreative Aspekt physikalisch-mathematischen Arbeitens zum Tragen — wenn beispielsweise Erklärungen geliefert oder neue physikalische Zusammenhänge entdeckt werden.

Sowohl die experimentelle als auch die theoretische physikalische Arbeit sind grundlegend für die Wissenschaft Physik und erst ihr wechselseitiges Zusammenspiel macht die Physik zu der erfolgreichen Naturwissenschaft, die sie ist. Hieraus ergeben sich direkt zwei Folgerungen, die besonders im didaktischen Kontext zu beachten sind: Zum einen sollte eine angemessene Vorstellung von der Natur der Physik das Wechselspiel von Experiment und Theorie widerspiegeln. Zum anderen hat man immer auch *irgendwie* mit Mathematik zu tun, wenn man Physik betreibt oder unterrichtet.

Bezüglich des ersten Punktes gibt es einigen Verbesserungsbedarf. Die Wechselseitigkeit von theoretischer und experimenteller Arbeit ist in dem Bild, das Schüler von der Natur der Physik haben, nahezu nicht existent. Schüler sehen die Arbeit eines Physikers im Durchführen von Experimenten, sein Arbeitsplatz ist das Labor. Die Arbeit theoretischer Physiker kommt in dem Bild der Schüler nicht vor (vgl. Kap. 2.6). Wenn man sich überdies vergegenwärtigt, dass der wohl bekannteste Physiker — Albert Einstein — ein Theoretiker war, erscheint das vorherrschende Bild von der Natur der Physik beinahe widersprüchlich. Hinzu kommt, dass trotz dieser Sachlage die Forschung bisher vornehmlich andere Aspekte der Schülervorstellungen zur Natur der Physik in den Fokus nimmt. Inadäquate Vorstellungen zur Rolle des Experiments sowie epistemologische Aspekte nehmen im Interesse der Forschergemeinschaft einen höheren Stellenwert ein als die nicht berücksichtigte theoretische Physik.

Der zweite Aspekt, dass Physik immer auch mit Mathematik zu tun hat, wird durch die Schulerfahrung der meisten Menschen bestätigt, Rechenaufgaben und quantitative Experimente prägen den Physikunterricht. Allerdings ist diese Art des Unterrichts vermehrt in die Kritik geraten. Mathematische Schwierigkeiten übertragen sich auf den Physikunterricht und das konzeptuelle physikalische Verständnis weist teilweise eklatante Mängel auf. Zudem zeigen Schüler oftmals die oberflächliche Strategie, die Rechenaufgaben durch Suchen der passenden Formel zu lösen, ohne eine Verbindung zum physikalischen Verhalten herzustellen (vgl. Kap. 2.3).

Aus dieser Problematik kann die Schlussfolgerung gezogen werden, die Mathematik aus dem Physikunterricht zu verdrängen oder zumindest auf ein Minimum zu reduzieren. Es gibt viele Unterrichtskonzepte und damit verknüpfte Forschungsvorhaben, die einen (fast) rein qualitativen Zugang zur Physik haben. Die physikalischen Konzepte und Gesetze sollen qualitativ erarbeitet und verstanden werden, um mathematische Schwierigkeiten zu vermeiden und das Lernen der physikalischen Grundlagen zu erleichtern. Diese Ansätze schlagen sich mittlerweile auch in den Lehrplänen nieder, aus denen im Laufe der Zeit viele physikalische Formeln verschwunden sind.

So sehr die Intention zu begrüßen ist, das konzeptuelle physikalische Verständnis zu fördern und die gängigen Rechenaufgaben kritisch zu betrachten, so muss doch festgestellt werden, dass mit einem qualitativen Physikunterricht ein Widerspruch zur Natur der Physik entsteht. Ein rein qualitativer Ansatz des Physiklernens hat nicht mehr *irgendwie* mit Mathematik zu tun und scheint auch nicht geeignet, Schülervorstellungen zur Natur der Physik als Wechselspiel von theoretischer und experimenteller Arbeit zu unterstützen. Zwar wird dies durch den gängigen rechenlastigen Unterricht offenbar auch nicht erreicht, eine Verbesserung ist durch den Verzicht auf Mathematik aber nicht zu erwarten.

Auf den ersten Blick scheint ein Dilemma vorzuliegen. Einerseits lassen die Schüler in ihrem Bild von der Wissenschaft Physik die Rolle der theoretischen Physik außer Acht, andererseits werden gerade die mathematischen Aspekte des Physikunterrichts kritisch betrachtet und aus dem Unterricht gedrängt. Die Frage ist jedoch, ob hier ein Widerspruch vorliegen muss. Lässt sich nicht auch die Möglichkeit eines konzeptuell-mathematischen Physikunterrichts denken, der sowohl das konzeptuelle physikalische Verständnis fördert als auch ein angemessenes Bild von der Rolle der theoretischen Physik transportiert? Der Ansatzpunkt, um diese Frage zu bejahen, findet sich in der obigen Aussage, dass man immer *irgendwie* mit Mathematik zu tun hat, wenn man Physik betreibt und unterrichtet — es kommt auf die Umsetzung des *irgendwie* an.

Wie eingangs erläutert und in den Zitaten von Feynman und Einstein beispielhaft zum Ausdruck gebracht, ist das Besondere und Charakteristische der Rolle der Mathematik in der Physik die enge strukturelle Verflechtung von mathematischer Beschreibung und physikalischen Zusammenhängen. Nicht das Ausrechnen von Zahlenwerten prägt die Arbeit theoretischer Physiker, sondern das Modellieren und Untersuchen der physikalischen Gesetze in mathematischen Strukturen. Diese Art, Mathematik zu gebrauchen, ist weit von der Rolle entfernt, die die Mathematik im Physikunterricht spielt. Dort herrscht das mathematische Kalkül vor, physikalische Größen müssen quantifiziert und berechnet werden, Formeln stehen in einer Werkzeugkiste — dem Tafelwerk — zur Verfügung. Diese Verwendung der Mathematik stimmt weder mit der Art und Weise überein, wie sie von theoretischen Physikern eingesetzt wird, noch scheint sie ein Verständnis physikalischer Konzepte zu fördern.

Eine mögliche Lösung der beiden Probleme — ohne sich von der Mathematik abzuwenden — liegt in der Elementarisierung theoretischer Physik. Wenn es gelingt, die Rolle der Mathematik im Physikunterricht ihrer Rolle in der theoretischen Physik anzunähern, dann wäre zumindest der Widerspruch zwischen Unterricht und Natur der Physik aufgelöst. Aber auch im Hinblick auf das Lehren und Lernen physikalischer Konzepte und Zusammenhänge kann ein positiver Effekt erwartet werden. Die Mathematik ist so eng mit der Struktur physikalischer Gesetze verknüpft, dass — gemäß Feynman — ein mathematisches Verständnis notwendig für ein tiefes Verständnis der Physik ist. Dieser Zusammenhang sollte bei einer gelungenen Elementarisierung erhalten bleiben und daher auch in der Schule unterstützend für ein konzeptuelles physikalisches Verständnis genutzt werden können.

Diese theoretischen Überlegungen lassen sich auch mit empirischen Erkenntnissen untermauern. In der Mathematikdidaktik ist es mittlerweile eine gängige Erkenntnis, dass inhaltliches Lernen mathematischer Operationen vor routinemäßigem Kalkül gelehrt und gelernt werden muss (siehe z.B. Prediger, 2009). Auch wenn diese Vorgehensweise am Anfang zu scheinbar langsameren Fortschritten führt, wird so erst der Grundstein gelegt, auf dem verständnisvolles Lernen stattfinden kann. Dies schafft die Voraussetzungen für eine sichere Beherrschung des Kalküls. Daher wird der mathematischen Modellierung — und hier insbesondere den Schritten der Übersetzung zwischen Mathematik und Realität — in der Mathematikdidaktik inzwischen ein großer Wert beigemessen (vgl. Kap. 2.4).

Wenn diese Erkenntnisse auf die Nutzung der Mathematik im Physikunterricht übertragen werden, gehen die Folgerungen in die gleiche Richtung, wie es die Elementarisierung der theoretischen Physik anzeigt. Es gilt, das Übersetzen zwischen Physik und Mathematik in den Fokus zu rücken, den beschreibenden Charakter der Mathematik zu betonen und das qualitative konzeptuelle Verständnis auch auf die mathematisch-physikalischen Zusammenhänge auszudehnen.

1.2. Forschungsziele

Die Änderung der Rolle der Mathematik im Physikunterricht ist ein ambitioniertes und umfangreiches Unterfangen. Zudem nimmt diese Thematik eine Nischenstellung in der physikdidaktischen Forschungslandschaft ein, so dass sowohl in theoretischer als auch empirischer Hinsicht noch viele offene Fragen bestehen. Dabei erscheint als grundlegender Mangel, dass noch kein theoretisch und empirisch fundiertes Konzept zum Umgang mit der Mathematik im Physikunterricht existiert. In der vorliegenden Arbeit soll ein Schritt zur Schließung dieser Lücke gegangen werden, indem sowohl ein theoretisches Modell als auch empirische Erkenntnisse hinsichtlich des Schülerverständnisses zum mathematischen Denken in der Physik bereitgestellt werden.

Als wesentlicher Teil eines Konzepts zum Umgang mit der Mathematik im Physikunterricht soll ein didaktisches Modell entwickelt werden, das die Prozesse physikalisch-mathematischen Arbeitens abbildet. Damit die Implikationen des Modells auch im Einklang mit der Natur der Physik stehen, ist eine wissenschaftstheoretische Reflexion der Rolle der Mathematik in der Physik nötig, auf der aufbauend das Modell entwickelt werden kann. Zur Anbindung an bisherige Forschungserkenntnisse ist es zudem sinnvoll, Ergebnisse und Modelle der Mathematikdidaktik zu reflektieren und auf deren Verwendung im physikalischen Kontext zu überprüfen.

In der empirischen Untersuchung geht es um die Probleme und Vorstellungen der Schüler bei der Übersetzung zwischen Physik und Mathematik. Wie bereits erwähnt, orientieren sich die Schüler oftmals am mathematischen Kalkül und können die Mathematik nicht als hilfreiche Unterstützung für ein physikalisches Verständnis nutzen. Eine Möglichkeit diesem Problem zu begegnen ist, die inhaltliche Verbindung zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischen Strukturen in den Fokus zu nehmen. Um den Physikunterricht in dieser Richtung zu gestalten, ist es allerdings notwendig, das Vorwissen der Schüler zu erkunden. Im Rahmen einer konstruktivistischen Lerntheorie stellt die Kenntnis der Vorstellungen der Lerner den Ausgangspunkt für gelingenden Unterricht dar.

Mit dieser Intention sollen die Verständnisprobleme und Vorstellungen von Schülern untersucht werden, die sich bei der Übersetzung zwischen Physik und Mathematik ergeben. Zusätzlich soll betrachtet werden, ob die Verbindung von Physik und Mathematik überhaupt eine Unterstützung für die Schüler darstellen kann. Damit wird in Verbindung mit der erarbeiteten Theorie die Grundlage bereitgestellt, Konzepte und Materialien für einen Physikunterricht zu erarbeiten, der sowohl eine theoretisch fundierte Position zur Rolle der Mathematik einnimmt als auch an die Probleme und Vorstellungen der Schüler anknüpfen kann.

1.3. Aufbau der Arbeit

Die Struktur dieser Arbeit ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile: Theorie und Empirie. Der theoretische Teil beginnt mit der Absteckung des theoretischen Rahmens, in den die Arbeit eingebettet ist. Einer lerntheoretischen Verortung im Konstruktivismus und der Erörterung des Verstehensbegriffes folgt die Darstellung von relevanten Forschungsergebnissen. Diese betreffen Erkenntnisse zum Thema Mathematik in der Physik, Transfer, Problemlösen und mathematische Modellierung. Zum letzten Thema wird der Modellierungskreislauf aus der Mathematikdidaktik detailliert erklärt, da er für die spätere Entwicklung des neuen Modells wichtig ist. Anschließend folgt eine Erläuterung des grundlegenden Konzeptes der mathematischen Grundvorstellungen und ihres physikalischen Pendants, den symbolischen Formen. Das Kapitel schließt mit einer Erörterung von Erkenntnissen zur Natur der Naturwissenschaften aus der Perspektive der theoretischen Physik.

Die folgenden beiden Kapitel stellen das Kernstück des theoretischen Teils dar. Sie widmen sich der Entwicklung eines Modells zum mathematischen Denken in der Physik. Dazu wird im dritten Kapitel die Rolle der Mathematik in der Physik aus wissenschaftstheoretischer Sicht reflektiert. Im vierten Kapitel folgt die Entwicklung eines physikalischen Mathematisierungsmodells, das als theoretische Grundlage für diese Arbeit dient. Es modelliert die Prozesse, die beim physikalisch-mathematischen Arbeiten auftreten und erlaubt didaktische Schlussfolgerungen. Zudem ist eine Einbettung in den Modellierungskreislauf der Mathematikdidaktik möglich, was zu einem revidierten Kreislauf für die Physik führt. Eine komprimierte Begründung und Entwicklung des Modells ist in Uhden et al. (2012) veröffentlicht worden.

Das letzte Kapitel zum theoretischen Teil widmet sich einer didaktischen Einbettung der erarbeiteten Theorie, um eine Schnittstelle zu der empirischen Untersuchung herzustellen. Dazu wird die Aufgabenkultur als ein passendes didaktisches Element vorgestellt, das die Umsetzung der theoretisch erarbeiteten Implikationen im Unterricht ermöglicht. Es werden zwei exemplarische Schulbuchaufgaben analysiert und Verbesserungsvorschläge unterbreitet. Anschließend folgt, aufbauend auf der zuvor erarbeiteten

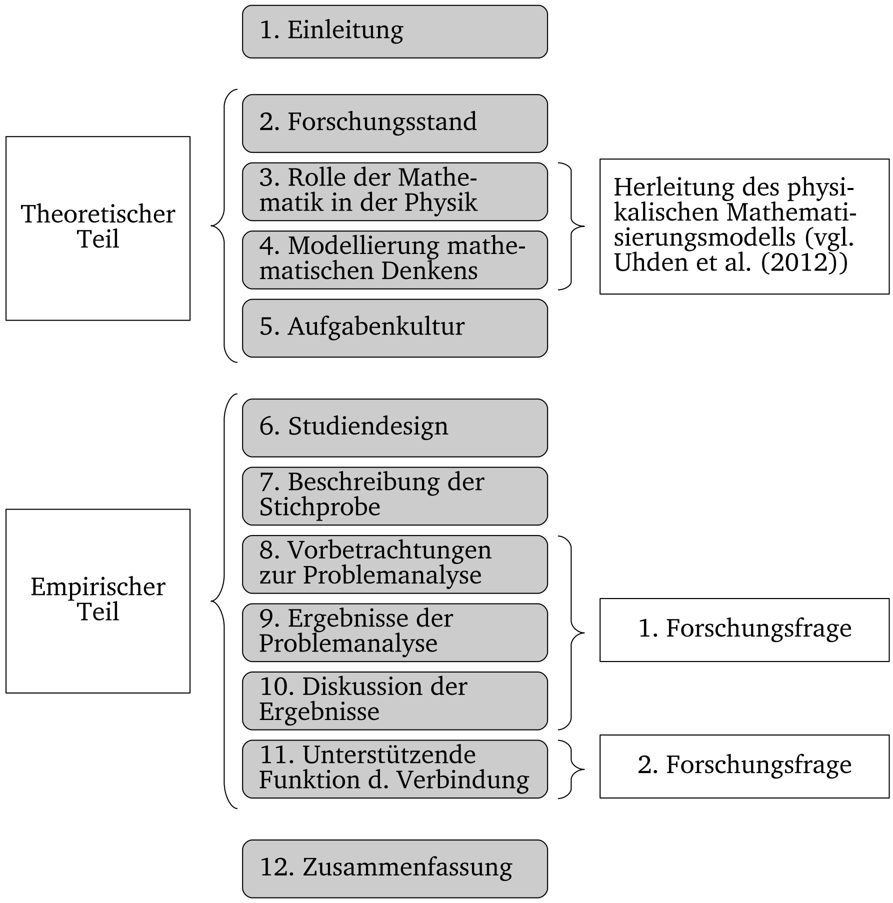


Abbildung 1.1.: Gliederung der Arbeit.

Theorie und dem physikalischen Mathematisierungsmodell, die Konstruktion neuer Aufgaben, die die Übersetzung zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischen Strukturen in den Fokus nehmen. Damit eignen sich diese Aufgaben als Grundlage für die Analyse der Verständnisprobleme zur Verbindung von Physik und Mathematik in der empirischen Studie.

Der empirische Teil ist in sechs Kapitel untergliedert, wobei sich die ersten beiden Kapitel dem Studiendesign, der Beschreibung der Stichprobe und der Auswertung von Standardaufgaben widmen. Es werden die konkreten Fragestellungen vorgestellt, die Untersuchungsmethodik erläutert und das Setting der Studie beschrieben. Anschließend folgt die Auswertung der Kontrollparameter und einiger elementarer Aufgaben, die eine Beschreibung der Stichprobe sowie erste Erkenntnisse zum Umgang mit der Mathematik in der Physik liefern.

Die folgenden drei Kapitel beleuchten die Hauptfragestellung der empirischen Studie: die Analyse der Verständnisprobleme der Schüler bei der Verbindung von Physik und Mathematik. In einem ersten Kapitel wird das methodische Vorgehen präzisiert und eine Verortung der Analyse in der erarbeiteten Theorie vorgenommen. Der Präsentation der Ergebnisse mit einer Erläuterung aller identifizierten Probleme schließt sich eine Analyse von vier Fallstudien an, anhand der sich der Einfluss der Probleme auf den Lösungsprozess der Schüler nachvollziehen lässt. Abschließend folgt eine detaillierte Diskussion der Ergebnisse.

Das sechste und letzte Kapitel des empirischen Teils widmet sich der zweiten Fragestellung dieser Studie, in der die unterstützende Funktion der Verbindung zwischen Physik und Mathematik betrachtet wird. Den methodischen Vorbemerkungen folgt die Ergebnispräsentation mit anschließender Interpretation und Diskussion. Damit ist die empirische Arbeit beendet und es kann in einem abschließenden Kapitel noch einmal die gesamte Arbeit reflektiert werden. Einer ausführlichen Zusammenfassung sowohl der theoretischen als auch empirischen Erkenntnisse folgt die Erörterung möglicher Implikationen für den Physikunterricht. Zum Abschluss werden die Beschränkungen der Arbeit diskutiert und mögliche Forschungsperspektiven aufgezeigt.

Teil I.

Theorie

2. Lerntheoretischer Rahmen und Forschungsstand

2.1. Konstruktivismus und die Bedeutung von Schülervorstellungen

> If I had to reduce all of educational psychology to just one principle, I would say this: The most important single factor influencing learning is what the learner already knows. Ascertain this and teach him accordingly. (Ausubel, 1968)

Eine Theorie, die beschreibt, wie der Mensch lernt, neues Wissen erwirbt und Zusammenhänge versteht, stellt einen grundlegenden Rahmen für jede didaktische Arbeit dar. Sie bestimmt die Ansätze zur Erforschung und Konzeption von Unterricht. In der Physikdidaktik lässt sich die mittlerweile etablierte Sicht zum Lehren und Lernen als konstruktivistisch beschreiben (Widodo und Duit, 2004; Duit und Wodzinski, 2006; Wiesner et al., 2011). Demnach erhalten die vom Menschen wahrgenommenen Daten ihren Sinn erst dadurch, dass der Lerner sie verarbeitet und in eigene bestehende Denkstrukturen einordnet. Das Lernen neuen Wissens ist also ein sehr subjektiv geprägter Prozess. Das bedeutet, dass Wissen nicht einfach weitergegeben werden kann, sondern individuell erworben und konstruiert werden muss. Um sinnvolle und langfristige Lernprozesse anzuregen, muss die individuelle Wissenskonstruktion bei der Gestaltung von Lehr-Lern-Situationen beachtet werden.

Eine der vielleicht wichtigsten Folgerungen aus der konstruktivistischen Sichtweise kommt bereits in dem obigen Zitat von Ausubel zum Ausdruck. Bevor der Konstruktivismus eine etablierte Theorie in der Lehr-Lern-Forschung wurde, brachte Ausubel eine der zentralen Aufgaben zukünftiger konstruktivistisch orientierter Didaktik auf den Punkt: Einen entscheidenden Faktor beim Lernen stellt das bereits vorhandene Wissen der Lernenden dar. Durch die Anerkennung der Rolle des Subjektes beim Wissenserwerb rücken die individuellen Vorstellungen, auf denen aufbauend neues Wissen konstruiert wird, in den Mittelpunkt. Das Vorwissen und die bereits vorhandenen Erfahrungen und Denkstrukturen werden zum entscheidenden Faktor für gelingende Lernprozesse.

Der Einfluss des individuellen Denkrahmens lässt sich anhand der Kommunikation zwischen Lehrer und Schülern nachvollziehen. Die vom Lehrer gesendeten Nachrichten sind keine Informationen mit objektiver Bedeutung, sondern entstehen vor dem Hintergrund der Vorstellungen des Lehrers. Die Schüler verleihen den Äußerungen des Lehrers jedoch eine Bedeutung, die auf ihren persönlichen Vorstellungen basiert und die von denen des Lehrers abweichen können. Die Antwort des Schülers ist wiederum dem gleichen Prozess unterworfen, so dass der Lehrer eventuell eine andere Bedeutung in der Äußerung des Schülers sieht, als es eigentlich vom Schüler gemeint war (Häußler et al., 1998, S. 170 f.).

Während Ausubel noch recht unspezifisch fordert, die Schüler entsprechend ihres Vorwissens zu unterrichten, wurden im Rahmen konstruktivistisch geprägter didaktischer Forschung seitdem erfolgreiche Anstrengungen unternommen, das Vorwissen der Schüler zu konkretisieren. Meist unter dem Begriff der Forschung zu Schülervorstellungen wurden in der Physikdidaktik die Vorstellungen der Schüler zu physikalischen Konzepten untersucht. Die Schülervorstellungen sind sowohl durch Alltagserfahrungen, Fernsehen und Bücher geprägt als auch durch vorherigen Unterricht. Es wurde in vielen Studien festgestellt, dass diese Vorstellungen oftmals nicht mit der physikalischen Sichtweise übereinstimmen (siehe z.B. Müller et al., 2007). Da die Schüler jedoch auf ihren Vorstellungen basierend neues Wissen konstruieren, stellt die Diskrepanz zwischen Schülervorstellungen und wissenschaftlich akzeptierten Modellen eine entscheidende Lernschwierigkeit dar (Wiesner et al., 2011, S. 34).

Wenn die Lehrer daher wissen, an welchen Vorstellungen die Schüler beim Lernen anknüpfen, können sie ihren Unterricht und entsprechende Lernhilfen daran ausrichten. Die Aussagen von Schülern können im Licht des Vorwissens interpretiert und daraus gezogene Schlussfolgerungen verstanden werden. Zudem liefert die Kenntnis von Schülervorstellungen einen guten Indikator für allgemeine Lernschwierigkeiten und mögliche Schwachstellen bisherigen Unterrichts.

Aufgrund dieser grundlegenden Bedeutung für konstruktivistisch aufgefasstes Lernen werden die Schülervorstellungen und deren Kenntnis als Basis zur Konzeption von Unterricht gesehen (Häußler et al., 1998, Kap. 6.4). Dabei ist diese Ansicht ebenso als generelle Anerkennung der Schülerperspektive zu verstehen wie als Grundlage zur Planung der fachlichen Sachstruktur und der Auswahl von Medien, Materialien und Methoden. Auch die Reflexion der Schüler über ihre eigenen Vorstellungen und den Lernprozess ist als wichtiges Element des Unterrichts zu begreifen.

Im Rahmen des in den Naturwissenschaftsdidaktiken weit verbreiteten Modells der „Didaktischen Rekonstruktion“ (Kattmann et al., 1997) nehmen die vorunterrichtlichen Vorstellungen der Schüler eine entscheidende Rolle ein. Bei der Entwicklung der Sachstruktur für den Unterricht reicht die rein fachliche Klärung nicht aus, es ist ebenfalls notwendig, das Vorverständnis und die Anschauungen der Lernenden mit einzubeziehen. Erst dadurch können Bezüge des Fachlichen zur Lebenswelt der Schüler hergestellt werden, die das Entwickeln angemessener Vorstellungen ermöglichen. Es gilt, unter Berücksichtigung der fachlichen Klärung, der didaktischen Strukturierung und der Schülervorstellungen, eine didaktische Rekonstruktion der unterrichtlichen Sachstruktur vorzunehmen und darauf aufbauend den Unterricht zu konzipieren.

Die physikdidaktische Forschung hat mittlerweile zu fast allen physikalischen Themengebieten die Schülervorstellungen herausgearbeitet (siehe Müller et al., 2007; Duit, 2009). Auch in weiteren Forschungsbereichen der Physikdidaktik spielt die Untersuchung von Schülervorstellungen eine wichtige Rolle. So werden in Studien, die den Bereichen „Nature of Science“ oder „Scientific Literacy“ zugeordnet werden, die Schülervorstellungen zur Natur der Physik und den Denk- und Arbeitsweisen der Physik untersucht. Letztendlich zeigt sich die besondere Bedeutung der Schülervorstellungen für die Didaktik auch darin, dass der erste der „Piko-Briefe“ sich diesem Thema widmet (Duit, 2004).

Die Betonung der Schülervorstellungen und ihrer Rolle für das konstruktivistische Lehren und Lernen ist auch für diese Arbeit von Bedeutung. Obwohl die Vorstellungen der Schüler zu fast allen physikalischen Themengebieten umfassend untersucht wurden, gibt es einen wichtigen Aspekt des Physiklernens, der bisher ausgespart wurde: Zum Vorwissen der Schüler bezüglich der Übersetzung zwischen mathematischen Strukturen und physikalischer Bedeutung gibt es noch keine weitreichenden Erkenntnisse. Die Auffassung des Begriffs „Schülervorstellung“ bedarf diesbezüglich vielleicht einer etwas anderen Interpretation als es das klassische Verständnis in Bezug zu physikalischen Konzepten wie dem Energie- oder Kraftbegriff nahelegt, die große Bedeutung individueller Vorstellungen ist für den Zusammenhang zwischen Physik und Mathematik jedoch ebenso gegeben. Wenn ein sinnvoller Umgang mit Formeln und Mathematik allgemein angestrebt wird, spielt aus konstruktivistischer Sicht die Kenntnis der Vorstellungen und Verständnisprobleme der Schüler zur physikalischen Bedeutung mathematischer Strukturen eine ebenso wichtige Rolle wie die Schülervorstellungen zum Lernen physikalischer Konzepte.

2.2. Verstehen

> Wer zur Quelle gehen kann, der gehe nicht zum Wassertopf. (Leonardo da Vinci)

Das *Verstehen* der mathematisierten Physik ist ein für diese Arbeit grundlegender Begriff. Um generell Mathematik sinnvoll zu nutzen, ist es wichtig, sie zu *verstehen*. Insbesondere in der Physik, wo das mathematische Wissen in einem anderen Kontext benötigt wird — und daher als schwierig bekannte Transferleistungen stattfinden müssen —, ist es wichtig, ein *Verständnis* von der Mathematik und ihrer Verbindung zur Physik zu haben.

Aber was bedeutet verstehen? Was soll im Rahmen dieser Arbeit unter Verständnis verstanden werden? Um diese Frage zu beantworten, bieten die Arbeiten von Richard Skemp (insbesondere Skemp, 1976, 1986) eine gute Grundlage. Skemp war sowohl Mathematiker als auch Psychologe und entwickelte aus der Verbindung beider Disziplinen eine psychologisch fundierte Theorie zum Lernen der Mathematik (Skemp, 1986) sowie komplette Lehr-Lern-Sequenzen und Materialien für den Anfangsunterricht (Skemp, 1993, 1994). Das Hauptziel seiner Didaktik war es, die Mathematik zu *verstehen*.

Das wichtigste Konzept, das Skemp (1976) zur Bestimmung des Begriffs von Verständnis einführte, betrifft die Unterscheidung zwischen relationalem und instrumentellem Verständnis. Dabei zeigt er die Bedeutsamkeit dieses Unterschiedes mit Hilfe des französischen Begriffs *faux amis* auf. Damit bezeichnen Franzosen Wörter, die in zwei Sprachen gleich oder sehr ähnlich sind, deren Bedeutung sich aber unterscheidet[1]. Zum Beispiel bedeutet das französische Wort *histoire* im englischen nicht *history*, sondern *story*. Das Problem mit den *faux amis* besteht darin, dass es zu Verwechslung und Verwirrung kommen kann, wenn einem die unterschiedliche Bedeutung zweier Wörter nicht bewusst ist. So habe nach Skemp auch das Wort Verständnis zwei Bedeutungen, die die Rolle von *faux amis* einnehmen. Die Verwechslung beider Bedeutungen sei eine wesentliche Ursache für Probleme mit der Mathematik.

1 Im Deutschen nutzt das Kinderspiel „Teekässelchen“ diese Doppeldeutigkeit von Begriffen.

Die beiden unterschiedlichen Bedeutungen von Verständnis bezeichnet Skemp als relationales und instrumentelles Verständnis. Dabei bezeichnet das relationale Verständnis das, was vielfach mit dem Wort Verständnis gemeint ist: sowohl zu wissen, was man tun muss als auch warum. Instrumentelles Verständnis dagegen lässt sich beschreiben durch „Regeln ohne Gründe“. Es bezieht sich auf das Kalkül, d.h. das algorithmische Anwenden von Verfahren und Techniken. Die Frage stellt sich, ob das instrumentelle Verständnis überhaupt als Verständnis bezeichnet werden sollte. Da es jedoch laut Skemp zu Verwechslungen in diesem Sinne kommt, ist es sinnvoll, diese Bedeutung durch einen eigenen Begriff zu präzisieren. Zudem kann ein Begriff durch die Abgrenzung zu dem, was er nicht ist, verdeutlicht werden. So lässt sich das relationale Verständnis durch die Abgrenzung vom instrumentellen Verständnis präzisieren.

Skemp veranschaulicht die unterschiedliche Bedeutung von instrumentellem und relationalem Verständnis mit Hilfe einer Analogie. Stellen Sie sich vor, Sie ziehen in eine neue Stadt, in der Sie sich noch nicht auskennen. Sie möchten von Ihrer Wohnung zum Supermarkt kommen, also fragen Sie jemanden nach dem Weg. Diesen prägen Sie sich ein, so dass Sie ihn auch am nächsten Tag wiederfinden. So verfahren Sie ebenfalls mit dem Weg zur Arbeit, zum Kino, zum Bahnhof, so dass Sie bald wissen, wie Sie zu den für Sie wichtigen Orten finden können. Sollten Sie sich allerdings einmal verlaufen, oder aufgrund einer Baustelle einen anderen Weg nehmen müssen, haben Sie ein Problem. Sie müssen wieder jemanden nach dem Weg fragen — sind also auf externe Hilfe angewiesen —, da Sie sich nicht auskennen.

Sie können allerdings auch nach einer anderen Methode vorgehen. Sie entschließen sich, an den ersten Tagen in der Stadt umher zu laufen und die Gegend zu erkunden. Auch auf dem Weg zur Arbeit probieren Sie einmal einen anderen Weg und erkunden neue Gegenden. Dadurch bauen Sie ein mentales Straßennetz auf, das sie flexibel benutzen können. Sie wissen dann nicht nur, wie Sie zum Supermarkt kommen, sondern können sich auch schnell zurechtfinden, wenn Sie das Kino suchen oder eine Umleitung nehmen müssen.

Das Einprägen fester Routen, die nicht mit einem sinnvollen Straßennetz verbunden sind, entspricht dem instrumentellen Verständnis, dem Lernen von Regeln ohne Gründe. Das Aufbauen eines mentalen Abbildes der Straßenverläufe durch zielloses Herumlaufen entspricht dagegen dem Versuch, ein relationales Verständnis — in diesem Fall des Straßensystems — zu bekommen. Diese Analogie zeigt deutlich, wie unterschiedlich instrumentelles und relationales Verständnis angelegt sind und worauf sie jeweils abzielen. Sie zeigt aber auch, was mögliche Gründe und eventuell sogar Vorteile des instrumentellen Verständnisses sein können. Der erste Weg zum Supermarkt ist kürzer, wenn er einer vorgegebenen Route folgt. Das Aufbauen eines mentalen Planes der Stadt erfordert erst etwas Zeit, während das Lernen von Regeln schneller Erfolge zeigt. Wenn es allerdings darum geht, wie belastbar diese Erfolge sind, zeigen sich die Probleme an dem Beispiel der Baustelle. Während ein relationales Verständnis mit diesen umzugehen und sie auch ohne externe Hilfe zu lösen weiß, steht ein auf instrumentellem Verständnis basierendes Wissen vor teilweise unlösbaren Hürden. Dies sei, so Skemp, ein essentieller Grund für mangelndes Mathematikverständnis.

Nach Skemp ist die Rolle des Begriffs Verständnis als *faux ami* eine wichtige Ursache für Probleme im Mathematikunterricht. Wenn beispielsweise Lehrer und Schüler unterschiedliche Vorstellungen von Verständnis haben, kann der Lehrer ein relationales Verständnis unterrichten wollen, die Schüler dagegen auf instrumentelles Verständnis fixiert sein. Dies könne für den Lehrer sehr frustrierend sein. Als viel gravierender sei jedoch der umgekehrte Fall anzusehen. Wenn Schüler nach einem relationalen Verständnis streben, Unterricht und Arbeitsmaterialien allerdings auf ein instrumentelles Verständnis abzielen, sei dies sehr unbefriedigend für die Schüler und führe dazu, dass Interesse und Lernleistung abnehmen. Auf der Basis eines Unterrichts, der ein instrumentelles Verständnis als Konzept zu Grunde legt, sei es für Schüler sehr schwierig, eigenständig ein relationales Verständnis aufzubauen.

Stellen Sie sich einen Lehrer vor, der seine Klasse daran erinnert, dass die Fläche eines Rechtecks durch $A = a \cdot b$ berechnet wird. Ein Schüler, der in der vorherigen Stunde nicht anwesend war, sagt, dass er das nicht verstehe. Daraufhin erklärt es der Lehrer: „Die Formel sagt aus, dass du die Fläche eines Rechtecks erhältst, indem du die Länge mit der Breite multiplizierst.“ Daraufhin kann der Schüler die geforderten Rechenaufgaben lösen und würde behaupten, jetzt habe er die Formel verstanden. Skemp würde dagegen sagen, dass der Schüler die Formel nicht verstanden hat. Diese Diskrepanz liege an der unterschiedlichen Bedeutung, die beide mit dem Wort „verstehen“ verbinden. Der Schüler redet von instrumentellem Verständnis, da er weiß, wie er mit der Formel umzugehen hat. Skemp bezieht sich auf das relationale Verständnis, da der Schüler nur eine Regel, aber nicht die Gründe kennt, warum diese Formel den Flächeninhalt eines Rechtecks bestimmt.

Weitere Beispiele instrumentellen Verständnisses aus dem Mathematikunterricht sind die Regeln zum Multiplizieren und Dividieren von Brüchen — „Multipliziere die Zähler und die Nenner miteinander!“ und „Multipliziere mit dem Kehrwert!“. Auch wenn der Lehrer beim Einführen dieser Regeln erklärt, woher sie kommen, zielen die Schüler auf ein instrumentelles Verständnis ab, wenn es vornehmlich die Regeln sind, die in Aufgaben gefordert und geprüft werden. Diese Beispiele scheinen immer noch im Mathematikunterricht geläufig zu sein, denn Prediger (2009) wird nicht ohne Grund „Inhaltliches vor Kalkül“ für das Lernen von Mathematik fordern. Im Sinne von Skemp’s Termini ist das „Inhaltliche“ konstitutiv für ein relationales Verständnis, während das Lehren des Kalküls auf das instrumentelle Verständnis abzielt.

Das instrumentelle Verständnis bezeichnet kein Verstehen im eigentlichen Sinn. Es ist eher ein als Verständnis getarntes Wissen von Regeln. Das relationale Verständnis dagegen ist das, was auch ohne den Zusatz „relational“ unter Verständnis verstanden werden soll. Der Unterschied zum instrumentellen Verständnis besteht darin, dass Warum-Fragen beantwortet werden können. Wenn man ein Phänomen (relational) verstanden hat, kann man sowohl die Gründe angeben, die das Phänomen bestimmen, als auch die Argumentationslinie darlegen, warum die Gründe das Phänomen begründen.

Diese Auffassung von Verstehen im Sinne des relationalen Verständnisses von Skemp (1976) ist — ebenso wie es Prediger (2009) für den Mathematikunterricht fordert — auch für den Umgang der Mathematik im Physikunterricht wesentlich. Aufgrund der Komplexität der Beziehung zwischen Mathematik und Physik und ihrer engen inhaltlichen Verknüpfung ist es wichtig, gerade hier großen Wert auf ein relationales Verständnis zu legen. Die Benutzung der Mathematik zum Beschreiben physikalischer Phänomene und Gesetze erfordert eine Zuschreibung inhaltlicher Bedeutung zu den mathematischen Strukturen. Diese Verbindung zwischen Mathematik und Physik kann nur dann sinnvoll genutzt werden und einen Beitrag zum Verständnis der Physik leisten, wenn sie auf relationalem Verständnis aufbaut.

2.3. Mathematik im Physikunterricht

> The challenge is to seriously consider the design and use of mathematics as an important subject for physics education research. (Hestenes, 2003, S. 104)

Eine besondere Herausforderung für die Physikdidaktik ist, die Mathematik so zu nutzen, dass sie hilfreich für ein physikalisches Verständnis genutzt werden kann oder dieses zumindest nicht behindert. Die bisherige Forschung hat sich eher auf das Lehren und Lernen eines qualitativen konzeptuellen Verständnisses konzentriert und dabei viele interessante Erkenntnisse befördert. Die Forschung zu einer sinnvollen Einbindung der Mathematik ist allerdings noch lückenhaft. In diesem Abschnitt — sowie den beiden folgenden — werden einige Blickwinkel und Aspekte dieser Thematik beleuchtet und relevante Forschungsergebnisse vorgestellt.

Eine mögliche Sicht auf den Gebrauch der Mathematik im Physikunterricht ist, dass mathematische Fähigkeiten eine Vorbedingung für das Physiklernen sind. Diese Ansicht kann nur eine notwendige — keine hinreichende — Bedingung sein, da gute mathematische Kenntnisse keinen Erfolg in Physik garantieren. So haben Hudson und McIntire (1977) festgestellt, dass ein Eingangstest in Mathematik nur in einer Richtung den Erfolg in einem Einführungskurs in (qualitativer) Physik voraussagt: niedrige mathematische Fähigkeiten bedeuten auch mangelnden Erfolg in der Physik, gute mathematische Fähigkeiten hängen mit den Physikleistungen jedoch nicht zusammen.

Die Benutzung der Mathematik in der Physik ist eng mit der Forschung zum Wissenstransfer verbunden. Unter Transfer wird allgemein die Fähigkeit verstanden, das in einer Situation erlernte Wissen in einer anderen anzuwenden (siehe z.B. Singley und Anderson, 1989). Transferleistungen stellen generell hohe kognitive Anforderungen dar und es ist mittlerweile vielfach belegt, dass sie nicht in dem gewünschten Maße gelingen, da Wissen und Verständnis kontextspezifisch erworben werden (Brown et al., 1989). Demzufolge kann ein Transfer der im Mathematikunterricht erlernten Kenntnisse und Fähigkeiten in die Physik nicht automatisch erwartet werden.

Diese Vermutung wird von Rebello et al. (2007) bestätigt. Demnach sei das Hauptproblem beim Verwenden der Mathematik in der Physik nicht das mathematische Verständnis, sondern der Transfer von im Mathematikunterricht strukturiert erworbenen Kenntnissen in die mathematisch weniger strukturierten physikalischen Problemstellungen. Die mathematischen Wissensstrukturen würden nicht in Übereinstimmung mit der physikalischen Problemstellung gebracht. Es bestünden Probleme, das passende mathematische Wissen auszuwählen und es flexibel anzuwenden. Dadurch verwendeten die Studenten zur Problemstellung inkonsistente mathematische Strategien.

Zudem gibt es bei der Verwendung der Mathematik in der Physik weitere Gesichtspunkte, die beachtet werden müssen. Redish (2006) macht darauf aufmerksam, dass die Mathematik in der Physik nicht einfach die Anwendung in einem Kontext sei, sondern mit einem anderen Verständnis einhergehe. Dies betrifft mehrere Aspekte. Der vielleicht wichtigste ist die aus physikalischer Perspektive automatische Interpretation mathematischer Gleichungen: Mathematische Symbole und Gleichungen seien mit der physikalischen Bedeutung verbunden. Diese Bedeutung werde jedoch nicht explizit thematisiert, sondern würde in der Physik implizit angenommen. So stellt zum Beispiel x in der Mathematik die unabhängige Variable dar, während in der Physik damit der Ort bezeichnet wird.

Die implizite physikalische Bedeutung mathematischer Symbole veranschaulicht Redish an einem instruktiven Beispiel. Würde man Mathematiker und Physiker die Gleichung $A(x, y) = K(x^2 + y^2)$ (mit K konstant) geben und fragen, wie dann $A(r, \Theta)$ aussehen würde, wären die Antworten verschieden. Physiker würden $A(r, \Theta) = Kr^2$ als Antwort geben, während Mathematiker auf $A(r, \Theta) = K(r^2 + \Theta^2)$ bestehen würden. Der Wechsel von kartesischen hin zu Polarkoordinaten ist eine implizite Annahme des Physikers, die streng mathematisch nicht korrekt ist. Aus mathematischer Sicht müsste eine neue Funktion $A(x, y) = B(r, \Theta)$ eingeführt werden. Durch die implizite physikalische Bedeutung ändert sich der Umgang mit der Mathematik, so dass die mathematischen Kenntnisse nicht einfach im Kontext Physik angewandt werden können.

Ein weiterer Punkt ist die in Mathematik und Physik unterschiedliche Rolle und Bezeichnung von Variablen und Konstanten. Während in der Mathematik Variablen fast immer mit x, y oder z und Konstanten mit a, b oder c bezeichnet werden, ist deren Verwendung in der Physik uneinheitlicher. Die Verwendung der Symbole richtet sich nach ihrer physikalischen Bedeutung und ihre Rolle als Konstante oder Variable kann variieren. Beim Interpretieren einer Gleichung wird oftmals der Einfluss von physikalischen Größen betrachtet, die normalerweise die Rolle von Konstanten einnehmen. Diese inkonsistente Verwendung und Bezeichnung zwischen Mathematik und Physik stellt ein nicht zu vernachlässigendes Problem für Lernende dar.

Eine Studie, die sowohl Schwierigkeiten beim Formelverständnis von Schülern untersucht als auch einen Ansatz zur Verbesserung vorstellt, wird von Bagno et al. (2008) bereitgestellt. In einer Untersuchung mit Schülern werden drei Hauptaspekte des mangelnden Formelverständnisses festgestellt. Zum einen haben die Schüler Schwierigkeiten, die physikalischen Bedingungen — zum Beispiel konstante Beschleunigung — zu spezifizieren, unter denen eine Formel verwendet werden darf. Zudem können die meisten Schüler nur sehr ungenaue Beschreibungen der Bedeutung der Komponenten einer Formel geben. Ebenfalls problematisch sei das Manipulieren der Einheiten.

Um den beobachteten Problemen zu begegnen, haben die Autoren Arbeitsmaterialien für einen Unterrichtsablauf erarbeitet, in dem die Schüler konzeptuelle Aussagen zu physikalischen Formeln machen müssen. Es wird explizit verlangt, die Komponenten der Formel, ihre Einheiten und die Bedingungen der Anwendbarkeit zu beschreiben. Weiterhin sollen Grenzfälle identifiziert und interpretiert sowie die physikalische Bedeutung der Formel erklärt werden. Nach der Durchführung einer entsprechenden Unterrichtssequenz konnte eine Verbesserung der diesbezüglichen Fähigkeiten festgestellt werden. Sowohl die Bedingungen der Anwendbarkeit als auch die Identifikation von Spezialfällen wurden von den Schülern mit größerer Sicherheit erkannt. Zudem berichten die meisten Schüler, dass ihnen die Arbeitsmaterialien geholfen haben, mehrere Aspekte der Formel besser zu verstehen.

Ein wichtiges Gebiet, das ebenfalls im Rahmen des Zusammenspiels von Mathematik und Physik betrachtet werden muss, ist die Forschung zum Problemlösen. Studien zu dieser Problematik haben eine lange Tradition, die sich schon früh durch beobachtete Schwierigkeiten und inadäquate Strategien von Schülern beim Lösen quantitativer Problemstellungen begründet hat. Polya (1945) — in seinem Klassiker „How to solve it“ — hat versucht, einen Leitfaden für eine erfolgreiche heuristische Strategie zum Problemlösen in der Mathematik zu entwickeln. Im Bereich der Physikdidaktik haben Reif et al. (1976) dafür plädiert, generelle kognitive Problemlösefähigkeiten explizit zu unterrichten. Durch den Leistungsvergleich von Novizen und Experten haben Larkin et al. (1980) feststellen können, dass die Experten eine weit verzweigte Wissensstruktur mit vielen komplexen Querverbindungen besitzen. Dadurch können sie Probleme besser und schneller lösen.

In einigen neueren Untersuchungen stehen die Strategien von Studenten beim Lösen quantitativer Physikaufgaben im Mittelpunkt. Tuminaro und Redish (2007) haben eine Kategorisierung von sechs sogenannten „epistemic games“ erarbeitet. Ein wichtiges Ergebnis der Studie ist, dass nur wenige Studenten dem wünschenswerten Vorgehen folgen, mit einer qualitativen Analyse zu beginnen und darauf aufbauend eine Übersetzung in mathematische Gleichungen vorzunehmen. Stattdessen benutzten sie vielfach das sogenannte „Plug and Chug“. Diese Strategie lässt sich als „Einsetzen und Losrechnen“ übersetzen. Die Studenten versuchen direkt eine Gleichung zu finden, die alle relevanten physikalischen Größen enthält, unabhängig von der physikalischen Situation. In diese Formel werden Zahlenwerte eingesetzt um eine numerische Lösung zu erhalten.

Die beiden von Tuminaro und Redish (2007) als kognitiv anspruchsvoll und wünschenswert bezeichneten Strategien stellen das „mapping meaning to mathematics“ und „mapping mathematics to meaning“ dar. Bei beiden Strategien besteht ein wichtiger Schritt im Übersetzen zwischen Mathematik und Physik. Während bei der ersten Strategie zuerst mit einer qualitativen physikalischen Analyse begonnen und darauf aufbauend die Übersetzung in die Mathematik vorgenommen wird, ist der Fokus bei der zweiten zuerst auf der Mathematik, bevor ein Abgleich mit physikalischem Verhalten stattfindet. Die wenigsten Studenten verfolgten jedoch eine dieser beiden Strategien. Die meisten Vorgehensweisen sind durch das „Plug and Chug“ oder andere Strategien gekennzeichnet, die eher ein auf auswendig gelernten Fakten basierendes Ausprobieren als einen systematischer Umgang mit der Mathematik erkennen lassen.

Eine ähnliche Studie von Walsh et al. (2007) konnte ebenfalls unterschiedliche Strategien herausarbeiten, die sich gut mit denen von Tuminaro und Redish (2007) in Einklang bringen lassen. Die Strategie „wissenschaftlich adäquates Vorgehen“ — die „mapping meaning to mathematics“ entspricht — wurde, wenn überhaupt, nur bei schwierigen Aufgaben angewandt. Bei leichten algorithmisch zu lösenden Aufgaben wurde auch von den Studenten, die einen wissenschaftlichen Ansatz beherrschten, nach dem Muster des „Plug and Chug“ vorgegangen. Dies deutet darauf hin, dass die Art und Weise der Problemstellung ein wichtiger Faktor bei der Auswahl der anzuwendenden Strategie darstellt.

Dieses der Problemstellung angepasste Verhalten lässt sich im Rahmen der Untersuchung von Bing und Redish (2009) verstehen. Die Studie untersucht den Gebrauch der Mathematik beim Lösen physikalischer Probleme anhand des „epistemological framing“. Darunter verstehen die Autoren die meist unbewusste Entscheidung, welches Wissen für das zu bearbeitende Problem relevant ist. Die vier herausgearbeiteten Kategorien sind „Ausrechnen“, „Physikalische Bedeutung“, „sich auf Autorität berufen“ und „mathematische Konsistenz“. Die beobachteten Studenten agierten meist längere Zeit innerhalb eines „framings“, so dass hilfreiche Fähigkeiten und Strategien zum Lösen von Problemen übersehen wurden. Ein flexiblerer Wechsel zwischen verschiedenen Denkschemata wäre für ein erfolgreiches Problemlösen hilfreich.

2.4. Mathematisches Modellieren und der Modellierungskreislauf

Ein wichtiges Forschungsgebiet, das eng mit der Rolle der Mathematik im Physikunterricht verbunden ist, betrifft das Modellieren. Nicht nur aus wissenschaftstheoretischer Sicht wurde die bedeutende Rolle von Modellen in der Physik von verschiedenen Autoren betont (siehe z.B. Hesse, 1966; Bunge, 1973; Redhead, 1980; Nersessian, 1992), auch zum Lehren und Lernen von Physik gibt es viele Forschungsprojekte, die sich mit dem Thema Modellieren befassen (siehe zum Beispiel GIREP Konferenz: van den Berg et al., 2006). Dabei werden zahlreiche Aspekte des Modellierens untersucht: von der Natur und Bedeutung von Modellen, über die Rolle mentaler Modelle bei der Wissenskonstruktion, bis hin zum Lehren und Lernen von Modellen und Modellieren (für einen Überblick siehe Gilbert und Boulter, 2000). Insbesondere der Aspekt der Authentizität wird als ein Merkmal eines auf Modellieren ausgerichteten Unterrichts angesehen (Gilbert, 2004).

Im Rahmen dieser Arbeit ist insbesondere der Aspekt des mathematischen Modellierens von Interesse. Hestenes (1987, 1992) war einer der ersten, der ein nahezu vollständig auf Modellierung ausgerichtetes Physiklehren gefordert hat. Die mathematische Modellierung nimmt hierbei einen wesentlichen Teil ein. Da sich die Essenz wissenschaftlicher Arbeit und physikalischer Theorien treffend mit der Tätigkeit des Modellierens beschreiben ließe, sei ein am Modellieren ausgerichtetes Physiklehren ebenso zu fordern. Dies würde nicht nur einen Unterricht erlauben, der eine adäquate Sicht wissenschaftlichen Arbeitens transportiere, sondern ebenfalls dazu beitragen, ein grundlegend kohärentes physikalisches Verständnis zu erlangen.

Eine Studie, die eine positive Evaluation eines auf Modellierung ausgerichteten Unterrichts feststellt, findet sich bei Wells et al. (1995). In dem beschriebenen Ansatz steht das Konstruieren und Benutzen von Modellen als Mittel zum Physiklernen im Fokus. Dabei wurde die Rolle von Modellen und des Modellierens explizit unterrichtet. Der Inhalt des Kurses basiert auf einer kleinen Anzahl grundlegender Modelle. In mehreren Modellierungszyklen durchlaufen die Schüler alle Phasen der Konstruktion, Auswertung und Anwendung der Modelle. Das Argumentieren anhand von Modellen wurde sowohl zur Vorhersage und Erklärung physikalischer Phänomenen als auch zum Planen und Interpretieren von Experimenten genutzt.

Zum einen ist ein explizit auf das Modellieren ausgerichteter Unterricht dicht an der wissenschaftlichen Praxis und daher eine Möglichkeit, der Forderung von adäquaten Schülervorstellungen zur Natur der Physik (siehe Kapitel 2.6) näher zu kommen. Zum anderen konnten von Wells et al. (1995) sowohl positive Effekte auf die Lernleistungen als auch auf die Problemlösefähigkeiten der Schüler nachgewiesen werden. Ein Vergleich dreier Physikkurse, von denen einer gemäß der Modellierungsmethode unterrichtet wurde, zeigte signifikante Vorteile des auf Modellierung ausgerichteten Unterrichts. Dabei schnitten die Schüler des Modellierungsunterrichts besser ab als die Schüler beider anderer Unterrichtsansätze, von denen einer als „traditionell" und einer als „cooperative inquiry" bezeichnet wird. Kritisch ist allerdings anzumerken, dass sowohl der Modellierungsunterricht als auch der „cooperative inquiry"-Unterricht von einem der Autoren unterrichtet wurde. Der Effekt der Lehrerpersönlichkeit ist in dieser Studie daher ein unbekannter Faktor.

Ein Vorschlag zur empirischen mathematischen Modellierung und dessen Evaluation findet sich bei Angell et al. (2008). Als ein entscheidender Aspekt im Modellierungsprozess wird der Umgang mit verschiedenen Repräsentationsformen gesehen. Die Fähigkeit, physikalische Zusammenhänge verbal, experimentell, grafisch oder mathematisch zu repräsentieren und sicher zwischen den verschiedenen Repräsentationen zu wechseln, sei eine wichtige Kompetenz beim Modellieren. Insbesondere die mathematische Modellierung bedürfe spezieller Aufmerksamkeit. Um diesen Forderungen nachzukommen wurde ein Unterrichtsprogramm entwickelt, in dem die Schüler vermehrt mit den verschiedenen Repräsentationsformen konfrontiert werden. Zudem wurde ein Test entwickelt, der die Modellierungskompetenz und das Verständnis von verschiedenen Formen der Repräsentation misst. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass die Schüler, die an dem neuen Unterrichtsprogramm teilgenommen haben, keine nennenswerten Leistungssteigerungen verzeichnen konnten, ihre Lernstrategien wurden ebenfalls nicht beeinflusst. Als Schlussfolgerung wurde daher das explizite Lehren der Modellierungsvorgänge und Lernstrategien vorgeschlagen, eine Forderung, die auch von anderen Autoren vertreten wird (Greca und Moreira, 2001). Interessanterweise wurde diese Forderung in dem vorgestellten Ansatz von Wells et al. (1995) bereits umgesetzt.

Weitere Vorschläge zur Verbesserung der Fähigkeiten von Schülern im Erstellen und Auswerten von mathematischen Modellen beim Bearbeiten physikalischer Probleme finden sich bei Pospiech (2008). Zum einen sei es wichtig, das induktive Aufstellen physikalischer Gesetze aus dem Experiment durch deduktive Herleitungen aus theoretischen Überlegungen zu ergänzen. Weiterhin sei ein besonders kritischer Punkt, der erhöhter Aufmerksamkeit bedarf, der Schritt der Idealisierung. Das Erkennen physikalischer Gesetze in spezifischen Kontexten und das Identifizieren relevanter Daten sei für die mathematische Modellierung realer Situationen essentiell. Eine Aufgabenkultur mit realitätsnahen Problemen, die verschiedene Aspekte mathematischer Modellierung ansprechen, biete Gelegenheiten zum Erlernen der nötigen Kompetenzen.

Naturgemäß befasst sich ebenfalls die Mathematikdidaktik mit dem mathematischen Modellieren. Innerhalb der letzten Jahrzehnte ist das Lehren und Lernen zum mathematischen Modellieren ein Hauptfokus mathematikdidaktischer Forschung geworden (siehe z.B. Lesh et al., 2010). Mathematisches Modellieren wird dabei generell als Übersetzen zwischen Mathematik und realer Welt in beiden Richtungen verstanden (Blum und Borromeo Ferri, 2009, S. 45). Es zeigt sich, dass viele andere mathematische Kompetenzen damit verknüpft sind (Niss, 2003). Zudem ist mathematisches Modellieren sehr kontextspezifisch und es findet kein automatischer Transfer von mathematischen Fähigkeiten auf Modellierungsprobleme statt (Niss, 1999) — Einsichten, die mit den bereits erwähnten Erkenntnissen aus der allgemeinen Transferforschung einhergehen (Brown et al., 1989). Diese Erkenntnisse sind auch ein Auftrag an die Physikdidaktik, sich mit dem Thema mathematisches Modellieren zu befassen.

Trotz der inhärenten Schwierigkeiten ist es möglich, mathematisches Modellieren erfolgreich zu lehren. Durch den expliziten Fokus auf Modellierungsprozesse im Unterricht können die Schüler Kompetenzen im mathematischen Modellieren erwerben (Niss, 1999). Ein entscheidendes Erfolgskriterium auf diesem Weg ist eine ausgewogene Balance zwischen Anleitungen durch den Lehrer und unabhängigen Arbeitsmöglichkeiten der Schüler. Strategische Interventionen, die die Schüler zum meta-kognitiven Reflektieren anregen — wie zum Beispiel „Stell dir die Situation vor!“ oder „Was ist dein Ziel?“ — stellen eine Möglichkeit dar, die angestrebte Balance zu erreichen. Zudem ist es als Lehrer wichtig, die Schüler bei ihren individuellen Modellierungsstrategien zu unterstützen und sich der eigenen Lösungspräferenzen bewusst zu sein (Blum und Borromeo Ferri, 2009).

Ein wichtiges Strukturmodell zum Beschreiben des mathematischen Modellierens stellt der Modellierungskreislauf dar. Er beschreibt und strukturiert die Prozesse, die beim mathematischen Modellieren nötig sind. Dabei gibt es verschiedene Varianten des Modellierungskreislaufs, die jeweils unterschiedliche Aspekte fokussieren und eine unterschiedliche Auflösung des Modellierungsprozesses anstreben (für einen Überblick siehe Borromeo Ferri, 2006; Haines und Crouch, 2010).

Allen Modellierungskreisläufen gemeinsam ist das mathematische Modell — teilweise

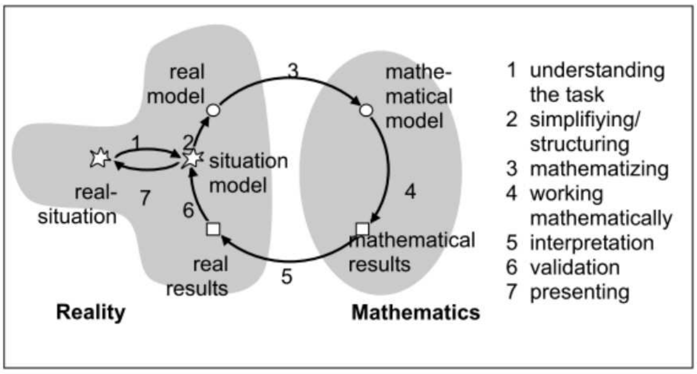


Abbildung 2.1.: Modellierungskreislauf von Blum und Leiß (2005) mit der Beachtung kognitiver Prozesse.

auch nur als Mathematik bezeichnet —, das mit dem Rest der Welt durch die Prozesse des Mathematisierens und Interpretierens verbunden ist. Der größte Unterschied der verschiedenen Kreisläufe besteht in der Modellierung der Realität. Einige konzentrieren sich auf die kognitiven Prozesse und betrachten auch die Rolle von mentalen Modellen (siehe Abbildung 2.1). Die Realität wird demnach als eine reale Situation beschrieben, die dem Subjekt durch ein mentales Modell zugänglich ist. Das mentale Modell wird dann idealisiert, um ein Modell der Situation zu erhalten. Andere Modellierungskreisläufe ziehen mentale Modelle nicht in Betracht. Die reale Situation wird mit einem Modell dieser Situation idealisiert oder sogar direkt mit dem mathematischen Modell mathematisiert (Beispiele finden sich in Borromeo Ferri (2006)).

Laut Prediger (2010) lässt sich der Modellierungskreislauf für unterschiedliche Zwecke einsetzen:

- zum Beschreiben von Kompetenzen
- zum Konstruieren neuer Aufgaben und Lernumgebungen
- zur Diagnose von Problemen und Kompetenzen
- als direkt zu lehrendes Modell, um über metakognitive Fähigkeiten die Mathematisierungskompetenz zu verbessern

Anhand des Modellierungskreislaufs ist es möglich, das Verhalten von Schülern zu beschreiben und zu analysieren (Haines und Crouch, 2010). Generell zeigt sich, dass mathematisches Modellieren als sehr schwieriger Prozess angesehen werden muss. Es lässt sich mehrfach beobachten, dass Schüler verfahrene und unstrukturierte Vorgehensweisen an den Tag legen, anstatt nach einem logischen Muster vorzugehen (Blum und Borromeo Ferri, 2009; Prediger, 2010). Der Modellierungskreislauf muss daher als strukturelles und nicht als chronologisches Modell des mathematischen Modellierens verstanden werden.

2.5. Grundvorstellungen und symbolische Formen

Ein wichtiger Aspekt beim mathematischen Modellieren und dem Modellierungskreislauf sind die Übersetzungsprozesse des Mathematisierens und Interpretierens. Bei der Übersetzung zwischen Mathematik und Realität muss mathematischen Strukturen eine Bedeutung zugewiesen werden. Wenn man beispielsweise eine Temperaturänderung mathematisch beschreiben möchte, muss man die passende mathematische Operation auswählen. Wodurch wird jedoch bestimmt, welche Mathematik die passende ist? Um dies zu entscheiden, muss eine Verbindung zwischen der zu modellierenden Situation und einer adäquaten mathematischen Operation hergestellt werden, so dass die Bedeutung der Darstellung innerhalb der Mathematik analog zur realen Situation ist. So ist gewährleistet, dass das mathematische Resultat nach einer Rückübersetzung — der Interpretation — überhaupt zur Ausgangssituation passen kann.

Die Sinnkonstituierung mathematischer Strukturen wird durch die sogenannten Grundvorstellungen beschrieben (vom Hofe, 1992; Prediger, 2009). Eine Grundvorstellung zu einer mathematischen Operation bezeichnet eine mögliche inhaltliche Interpretation dieser Operation. Zum Beispiel ist eine mögliche Grundvorstellung zur Addition die Änderung eines Ausgangszustandes in einen Endzustand. Das bedeutet, dass die mathematische Struktur $a + b = c$ so interpretiert werden kann, dass der Ausgangszustand a durch eine Änderung in den Endzustand c überführt wird. Die Variablen a und c beziehen sich auf die gleiche Sache, beschreiben sie allerdings zu unterschiedlichen Zuständen vor und nach dem Ausführen einer Aktion. Die Variable b dagegen repräsentiert die Größe der Änderung dieser Aktion.

Diese Interpretation der Struktur $a + b = c$ stellt jedoch nicht die einzige Grundvorstellung zur Addition dar. Nach Kirsch (1987, S. 64) gibt es noch zwei weitere Deutungsmöglichkeiten. Zusätzlich zur Änderung eines Ausgangszustandes in einen Endzustand kann die Addition auch die Aneinanderreihung von mehreren Änderungen zu einer Gesamtänderung beschreiben. Eine dritte Interpretationsmöglichkeit — die vielleicht geläufigste — ist die Bedeutung der Addition als zusammenfügen zweier Mengen zu einer Gesamtmenge: Drei Äpfel plus zwei Äpfel ergeben fünf Äpfel.

Wenn eine mathematische Struktur interpretiert werden soll, muss eine passende Grundvorstellung ausgewählt werden. Das interpretierte Verhalten bestimmt sich dabei durch die aktivierte Grundvorstellung. In der anderen Richtung, der Mathematisierung von Situationen, muss die Bedeutung der Situation mit einer Grundvorstellung einer mathematischen Operation in Verbindung gebracht werden, womit die mathematische Struktur festgelegt wird.

Bei der Modellierung einer Temperaturänderung beispielsweise ist die zu modellierende Situation eine Änderung des Ausgangszustandes der Temperatur in einen Endzustand der Temperatur. Diese Bedeutung gehört zu einer Grundvorstellung der Addition, weshalb die adäquate mathematische Struktur durch die Gleichung $a + b = c$ gegeben ist. Dabei repräsentieren a und c die Temperatur zu Beginn bzw. zum Ende der Situation, b steht für den Temperaturunterschied. Das Bestimmen der elementaren Bedeutung einer realen Situation sowie das Zuordnen dieser Bedeutung zu einer passenden Grundvorstellung einer mathematischen Operation stellen die entscheidenden Prozesse beim Übersetzen zwischen Mathematik und Realität dar.

Die besondere Schwierigkeit für Schüler besteht darin, die möglichen Grundvorstellungen mathematischer Operationen flexibel anzuwenden und jeweils die passende zu aktivieren. Oftmals ist eine Grundvorstellung dominant, so dass andere Grundvorstellungen nicht bewusst sind. Dies führt dazu, dass reale Situationen nicht mathematisch modelliert werden können. Wenn beispielsweise nur die Grundvorstellung der Mengenoperation zur Addition aktiviert wird, ist es schwer, damit die Temperaturänderung richtig zu beschreiben. Eine detaillierte Analyse dieses Beispiels aus Sicht der Grundvorstellungen findet sich bei Malle (1988).

Ein flexibler Umgang mit den Grundvorstellungen und die jeweils zur Situation passende Aktivierung sind eine entscheidende Bedingung für einen auf Verständnis basierenden Umgang mit der Mathematik. Grundvorstellungen stellen die elementare Sinnkonstituierung mathematischer Strukturen dar und sind damit ein entscheidender Aspekt bei der Übersetzung zwischen Mathematik und Realität. Sie ermöglichen die Anwendung der Mathematik zur Modellierung realer Situationen. Auch für die mathematische Arbeit in der Physik sind sie daher von essentieller Bedeutung. Die Grundlage für die Mathematisierung der Physik besteht in den Grundvorstellungen, indem sie die Möglichkeit bereitstellen, mathematische Strukturen mit physikalischer Bedeutung in Verbindung zu bringen.

In diesem Zusammenhang stellt die Untersuchung von Sherin (2001) einen wichtigen theoretischen Rahmen für die Physik zur Verfügung. Die Studie geht der Frage nach, wie Studenten physikalische Gleichungen verstehen und physikalisches Verhalten in mathematischen Strukturen ausdrücken. Sherin argumentiert, dass das Verständnis von Gleichungen über das Wissen zu den physikalischen Bedingungen der Anwendbarkeit hinausgehen kann. Stattdessen stehe die spezifische Anordnung der Symbole für eine physikalische Bedeutung. Durch die Identifikation bestimmter Strukturen innerhalb der physikalischen Gleichungen werde eine Bedeutung assoziiert, so dass die Gleichungen physikalisches Verhalten beschreiben können.

Dieses Vokabular elementarer Gleichungsstrukturen bezeichnet Sherin als „symbolische Formen“. Dabei steht eine symbolische Form für eine charakteristische Struktur einer Gleichung und deren korrespondierendem physikalischem Verhalten. So kann zum Beispiel ein Gleichheitszeichen zwischen zwei Termen ein Gleichgewicht bedeuten. Ähnlich wie bei den Grundvorstellungen sind auch bei den symbolischen Formen mehrere Interpretationen möglich: Das Gleichheitszeichen kann ebenfalls eine gleiche Menge beschreiben.

Sowohl Grundvorstellungen als auch symbolischen Formen liegt die gleiche Idee zugrunde: Es geht um die inhaltliche Bedeutung mathematischer Ausdrücke. Ein Unterschied besteht hauptsächlich in dem Blickwinkel und dem Kontext. Während die Grundvorstellungen allgemeingültige Bedeutungen mathematischer Operationen beschreiben, beziehen sich die symbolischen Formen auf Gleichungsstrukturen im physikalischen Kontext. Dabei kann es durchaus zu Überschneidungen kommen. Aus Sicht der Grundvorstellungen kann die Addition das Zusammenfügen von Teilmengen zu einer Gesamtmenge beschreiben, aus Sicht der symbolischen Formen steht die gesamte Struktur der Terme und Pluszeichen für „Teile eines Ganzen“. Da die symbolischen Formen mathematische Operationen enthalten, liefern sie eine alternative Beschreibung gleicher Ideen beziehungsweise lassen sich selbst durch die Grundvorstellungen beschreiben.

Sherin hat Studenten beim Lösen physikalisch-mathematischer Probleme beobachtet und deren Verständnis physikalischer Gleichungen anhand der symbolischen Formen analysiert. Dabei konnte er die in Tabelle 2.1 aufgelisteten symbolischen Formen identifizieren. Die bei den Grundvorstellungen bereits erwähnte Schwierigkeit, flexibel mit ihnen umgehen und jeweils die passende aktivieren zu können, wird auch bei den symbolischen Formen deutlich. So stehen die verschiedenen symbolischen Formen der Gruppen „Konkurrierende Terme“ (1.) und „Mengen“ (3.) für ähnliche Gleichungsstrukturen. Der Zusammenhang zu den Grundvorstellungen wird ebenfalls offensichtlich. Zum Bei-

1. Konkurrierende Terme
   a) Einfluss: $\square \pm \square \pm \square$
   b) Gegensatz/Widerpart: $\square - \square$
   c) Gleichgewicht: $\square = \square$
   d) Auslöschen (a): $0 = \square - \square$
2. Proportionalität
   a) Direkte Proportionalität: $\left[\frac{\ldots x \ldots}{\ldots}\right]$
   b) Indirekte Proportionalität: $\left[\frac{\ldots}{\ldots x \ldots}\right]$
   c) Verhältnis: $\left[\frac{x}{y}\right]$
   d) Auslöschen (b): $\left[\frac{\ldots x \ldots}{\ldots x \ldots}\right]$
3. Mengen
   a) Teile eines Ganzen: $[\square + \square + \square]$
   b) Basis und Änderung: $[\square \pm \Delta]$
   c) Ganzes minus Teil des Ganzen: $[\square - \boxdot]$
   d) Gleiche Menge: $\square = \square$
4. Abhängigkeit
   a) Abhängig von einer Größe: $[\ldots x \ldots]$
   b) Unabhängig von einer Größe: $[\ldots]$
   c) Abhängig *nur* von einer Größe: $[\ldots x \ldots]$
5. Koeffizienten
   a) Produkt als Koeffizient×Variable: $[x\square]$
   b) Skalieren: $[n\square]$
6. Multiplikation
   a) Intensiv×Extensiv: $x \times y$ (Bemerkung: Intensive Größen sind Mengen von etwas pro Einheit von etwas anderem, z.B. Dichte. Eine extensive Größe ist eine Zahl von Einheiten.)
   b) Extensiv×Extensiv: $x \times y$
7. Andere
   a) Identität: $x = \ldots$
   b) Aussterben: $[e^{-x\ldots}]$

Tabelle 2.1.: Liste symbolischer Formen (Sherin, 2001, eigene Übersetzung).

spiel beinhalten die symbolischen Formen 1a, 3a und 3b unterschiedliche Grundvorstellungen zur Addition, während 1a, 1b, 3b und 3c verschiedene Grundvorstellungen der Subtraktion enthalten.

Die von Sherin gefundenen symbolischen Formen zeigen auf, wie physikalische Bedeutung mit mathematischen Strukturen verbunden ist. Sie geben einen Einblick in elementare Bedeutungseinheiten physikalischer Gleichungen. Es wird deutlich, wie subtil und komplex die Übersetzung zwischen Mathematik und physikalischer Bedeutung ist. Ein sicherer Umgang mit den möglichen symbolischen Formen stellt die Grundlage für eine sinnvolle Verbindung von physikalischem Verhalten und mathematischen Strukturen dar.

Sherin (2001) konnte zeigen, dass Studenten in der Lage sind, mit diesen symbolischen Formen zu argumentieren und somit ein semantisches Formelverständnis besitzen. Allerdings beobachtet er auch unzutreffende symbolische Formen oder ein nur eingeschränktes Repertoire. Die identifizierten symbolischen Formen liefern eine Zielvorstellung, an der sich ein sinnvolles Physiklehren zum Umgang mit der Mathematik orientieren sollte. Offene Fragen verbleiben hinsichtlich möglicher Fehlvorstellungen sowie bezüglich der Situation in der Schule. Die letztendlich anzustrebenden symbolischen Formen sollten in der Schule zwar die gleichen bleiben, eine Analyse der Vorstellungen der Schüler ist jedoch von besonderer Bedeutung. Erst durch die Erfassung des vorhandenen Verständnisses ist es möglich, den Schülern angepasste Lernwege zu einem adäquaten Umgang mit den symbolischen Formen anzubieten (siehe auch Kapitel 2.1).

2.6. Natur der Naturwissenschaften

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels zum theoretischen Rahmen und Forschungsstand behandelt die Forschung zur Natur der Naturwissenschaften bzw. „Nature of Science“. Es wird schon seit längerem gefordert, dass der Physikunterricht nicht nur fachliches Wissen vermitteln sollte, sondern auch ein angemessenes Bild von der Natur der Physik (siehe Matthews, 1992; McComas et al., 1998; Höttecke, 2001; Lederman, 2007). Diese Thematik hat einen eher impliziten Einfluss auf die vorliegende Arbeit. Normalerweise geht es in Forschungsprojekten zum Thema „Nature of Science“ um die Vorstellungen der Schüler zur Natur der Naturwissenschaften. Es stellen sich beispielsweise die Fragen, welches Bild Schüler von der Arbeit von Physikern haben, wie das physikalische Wissen erworben wird und welchen epistemologischen Status es in den Augen der Schüler hat.

Neben der Erfassung von Schülervorstellungen geht es ebenfalls um Interventionskonzepte, die ein angemesseneres Bild von der Natur der Physik transportieren. Insgesamt nimmt die Rolle des Experimentierens einen wichtigen Platz in der Forschung zur „Nature of Science“ ein, während die Rolle der Mathematik oftmals nicht beachtet wird.

Das Aussparen der Mathematik im Rahmen der Forschung zur Natur der Naturwissenschaften stellt die Schnittstelle zu dieser Arbeit dar. Allerdings geht es in dem hier vorgestellten Forschungsprojekt nicht um die Erfassung von Schülervorstellungen zur Natur der Physik und nur indirekt um das Lehren und Lernen von adäquaten Vorstellungen. Diese Arbeit lässt sich demnach nicht direkt als eine Arbeit zum Forschungsgebiet „Nature of Science“ auffassen. Gleichwohl ist diese Arbeit auf einer ähnlichen Motivation begründet und insbesondere in den folgenden beiden Kapiteln — zur Rolle der Mathematik in der Physik und der Entwicklung eines didaktischen Modells — spielt die Natur der Physik eine wichtige Rolle. Insofern lässt sich durchaus eine Verortung auch in der Forschung zur „Nature of Science“ vornehmen, jedoch eher als Motivationsgrundlage und Erweiterung des Forschungshorizontes denn als klassische Forschung zu den diesbezüglichen Schülervorstellungen.

Aus diesem Grund folgt an dieser Stelle eine kurze Einführung in die gängigen Erkenntnisse der Forschung zur Natur der Naturwissenschaften. Es wird ein kurzer Überblick gegeben, für weiterführende Erörterungen sei auf die Literatur verwiesen. Die hier vorgestellten Erkenntnisse dienen einerseits als Rahmen und Motivation für die folgenden beiden Kapitel dieser Arbeit, andererseits als Anlass, auch die Rolle der Mathematik im Physikunterricht im Rahmen eines Lehrens und Lernens zur Natur der Physik in den Blickpunkt zu rücken. Die in dieser Arbeit vorgenommene Elementarisierung theoretischer Physik sowie die in Kapitel 5 vorgestellten Aufgaben lassen sich auch als Beitrag zu einer der Natur der Physik angemesseneren Rolle der Mathematik im Physikunterricht begreifen. Dies kann zumindest eine Grundlage sein, auf der aufbauend weitere Forschungsvorhaben mit explizitem Bezug zur „Nature of Science“ die Verbesserung von Schülervorstellungen zur Rolle der Mathematik in der Physik untersuchen können.

Die Diskussion des Forschungsstandes — hauptsächlich im angelsächsischen Raum — zur „Nature of Science“ wird an dem Überblicksartikel von Höttecke (2001) orientiert. Dabei werden nur solche Erkenntnisse betrachtet, bei denen die theoretische Physik eine Rolle spielt beziehungsweise spielen sollte. Die Analyse erfolgt aus der Perspektive von Fragen wie: Wird auch die Arbeit und Person theoretischer Physiker in den Vorstellungen der Schüler repräsentiert? Was lässt sich aus der Perspektive des Zusammenspiels theoretischer und experimenteller Arbeit als zentrales Element der Physik zum Forschungsstand sagen? Welche Rolle nimmt die theoretische Physik in den Untersuchungen zur „Nature of Science“ ein?

Höttecke (2001) analysiert vier Themenschwerpunkte zum Schülerverständnis zur Natur der Naturwissenschaften, wobei sich bezüglich jedes Bereichs Aspekte (der Vernachlässigung) theoretischer Physik diskutieren lassen. Das erste Themenfeld bezieht sich auf die Person, Arbeit und Arbeitsbedingungen des Wissenschaftlers. Einige ältere Untersuchungen würden auf stereotype Vorstellungen zur Person des Wissenschaftlers als Mann mit weißem Kittel, der allein im Labor arbeite, hindeuten. Allerdings bezögen sich die Ergebnisse vermehrt auf jüngere Schüler, die, wenn überhaupt, noch wenig Physikunterricht hatten. Bei älteren Schülern mit einigen Jahren Erfahrung im Physikunterricht lassen sich dagegen Vorstellungen finden, die vom experimentellen Unterricht geprägt scheinen. Das Experimentieren kommt in nahezu allen Bildern als Haupttätigkeit des Wissenschaftlers vor. Die theoretisch-mathematische Arbeit findet sich am ehesten in der Vorstellung vom intellektuellen Wissenschaftler, der neue Ideen ausbrütet und testet. Jedoch scheint auch hier die theoretische Arbeit eher als intellektuelle Vorleistung zum Experimentieren verstanden zu werden.

Die Vorstellungen zum Arbeitsplatz seien bisher nicht besonders gut untersucht. In den vorliegenden Ergebnissen finde sich ein klarer Fokus auf das Labor als Arbeitsplatz. Insbesondere tauche der Computer nicht als Arbeitsumgebung auf, eine Tatsache, die allerdings dem Zeitpunkt der Untersuchung vor den achtziger Jahren geschuldet sein könne. Heutzutage könnte die Situation anders aussehen, allerdings stellt sich dann die Frage, ob der Computer als Werkzeug zum Auswerten von Daten oder zum Durchführen von Simulationen angesehen würde.

Ein weiterer Themenschwerpunkt der analysierten Schülervorstellungen betrifft den epistemologischen Status des naturwissenschaftlichen Wissens. Diesbezüglich könne ein inhomogenes Schülerverständnis festgestellt werden, das sich in der Tendenz am ehesten als naiv-realistisch beschreiben ließe. Demzufolge sähen die Schüler das physikalische Wissen als Abbild in der Natur existierender Gesetzmäßigkeiten an. Durch Beobachtungen bzw. Untersuchungen würde die Wirklichkeit erforscht. Das naturwissenschaftliche Wissen sei gesichert und feststehend und würde durch Formeln und Zahlen ausgedrückt.

Diese Vorstellungen scheinen ebenfalls durch einen experimentellen Zugang zur Physik beeinflusst zu sein. Das physikalische Wissen als Abbild der Naturgesetze passt zu einer naiven Auffassung vom Experiment, ebenso wie sich aus dem Zusammenfassen beobachteter Gesetze mittels Formeln deren Rolle als Formulierung des Wissens ergibt[2]. Es könnte sein, dass ein Unterricht, der größeren Wert auf die (mathematische) Modellierung legt, angemessenere Vorstellungen zum epistemologischen Status physikalischen Wissens transportiert. Bei Modellierungen wird der Unterschied zwischen Theorie und Realität durch die Idealisierung der Modelle möglicherweise stärker betont, als es beim Experimentieren der Fall ist.

Als dritten Themenschwerpunkt diskutiert Höttecke (2001) das Schülerverständnis von der Rolle des Experimentes. Demnach werde das Experiment als zentrales Merkmal der Naturwissenschaften angesehen, deren Funktion im Feststellen des faktischen Tatbestands, im Überprüfen der Wirklichkeit, liege. Der Aspekt der Theoriegeladenheit physikalischen Experimentierens komme in dieser empiristischen Auffassung nicht vor. Experimentieren sei eher ein neutrales Ausprobieren und Sammeln objektiver Daten. Mit zunehmender Unterrichtserfahrung sei zwar ein elaborierteres Schülerverständnis vom Experimentieren zu beobachten, allerdings konnte nur bei einer Minderheit von sechzehnjährigen Schülern die Vorstellung gefunden werden, das Experimentieren diene auch dazu, Theorien zu überprüfen. Es muss daher deutlich konstatiert werden, dass die grundlegende Eigenschaft der Physik als wechselseitiges Zusammenspiel von Experiment und Theorie in den Vorstellungen der Schüler praktisch nicht existiert.

Bei einem Aspekt zum letzten Themenschwerpunkt, dem Verständnis von der naturwissenschaftlichen Wissensproduktion, lässt sich die Dominanz des Experimentierens ebenfalls wiederfinden. Bezüglich der Methodik der Naturwissenschaften würden nur sehr wenige Schüler den Standpunkt vertreten, dass es keine einheitliche Methodik der Wissenschaft gebe. Stattdessen werde das Vorgehen vielfach als Abfolge von Hypothese und Experiment und als Befolgen von Laborroutinen angesehen. Theoretisch-mathematische Arbeit als eigenständiger Tätigkeitsbereich findet sich in den Schülervorstellungen zur Methodik wissenschaftlicher Arbeit nicht wieder.

Die hier diskutierten Erkenntnisse zu den Schülervorstellungen von der Natur der Naturwissenschaften zeigen recht deutlich, dass die Rolle der Mathematik oder der theoretischen Physik nahezu komplett außer Betracht gelassen wird. Die Arbeit theoretischer Physiker taucht in dem Bild, das sich Schüler von der Physik machen, nicht auf. Auch das Zusammenspiel von Theorie und Experiment als Wesenszug der Physik existiert

2 Damit soll nicht gesagt werden, dass diese epistemologischen Auffassungen die Vorstellungen von Experimentalphysikern widerspiegeln. Diesbezüglich sollten eigentlich keine gravierenden Unterschiede zwischen Theoretikern und Experimentatoren vorliegen.

nicht in den Schülervorstellungen. Höchstens Ansätze dieses Bewusstseins zeigen sich in einigen Aspekten zum Einfluss theoretischer Überlegungen auf das Experimentieren. Zudem lässt sich die Hypothese aufstellen, dass durch die Konzentration auf das Experiment die Einstellungen vom naiven Realismus und der empiristischen Grundhaltung bei den Schülern begünstigt werden. Ein ausgewogeneres Zusammenspiel von Beobachtung und Modellierung, von Aspekten experimenteller und theoretischer Physik, könnte adäquatere Vorstellungen begünstigen.

Abschließend ist noch anzumerken, dass sich die Nichtbeachtung der theoretischen Physik und der Rolle der Mathematik nicht nur in den untersuchten Schülervorstellungen zeigt, sondern ebenso in den Untersuchungen selbst. Keine der diskutierten Studien hat die Schülervorstellungen zur Rolle der Mathematik in den Naturwissenschaften explizit untersucht. Es scheint so, als ob dieser Aspekt der Natur der Naturwissenschaften nicht zu ebendiesem Forschungsbereich gezählt wird. Berichte von einer neueren Forschungsarbeit, die versucht, diese Lücke zu schließen, finden sich bei Krey und Mikelskis (2009, 2010). Diese Untersuchung zielt direkt auf die Erfassung von Schülervorstellungen zur Rolle der Mathematik in der Physik mit Hilfe eines Fragebogens ab.

In den Daten der Pilotstudie (Krey und Mikelskis, 2009) zeigt sich, dass die Schüler der zehnten und zwölften Klassen die formalen und technischen Tätigkeiten lieber durchführen als modellierende Tätigkeiten. Die Ergebnisse der Hauptstudie (Krey und Mikelskis, 2010) passen zu diesem Bild. Demnach haben die Schüler hauptsächlich ein oberflächliches Bild von der Rolle der Mathematik in der Physik. Fast die Hälfte der Schüler bewerten die Rolle der Mathematik aufgrund der selbst erlebten Tätigkeiten, die zu ungefähr vier Fünfteln den formalen Umgang widerspiegeln. Unter Berücksichtigung der Aussagen, die die Rolle der Mathematik aufgrund mathematischer Inhalte umreißen, zeigt sich, dass zwei Drittel aller Schüler die Rolle der Mathematik in rezeptartigen Tätigkeiten und formalen Inhalten sehen. Nur ungefähr je fünf Prozent der Schüler sehen in der Mathematik die Möglichkeit zur formalisierten Darstellung oder schreiben ihr eine Verständnis fördernde Funktion zu. Als positiver Aspekt lässt sich festhalten, dass eine Entwicklung von der zehnten zur zwölften Klassenstufe stattfindet, die eine erhöhte Zuschreibung anspruchsvoller mathematischer Tätigkeiten zur Rolle der Mathematik zeigt.

Insgesamt bestätigt diese Studie den bisher gewonnenen Eindruck, dass die Schüler die theoretische Physik in ihren Vorstellungen von der Wissenschaft Physik außer Acht lassen. Explizit zur Rolle der Mathematik befragt, offenbaren sie ein oberflächliches

Verständnis, welches durch kalkülartige Rechnungen und formale Inhalte geprägt ist. Die Vorstellungen der Schüler zur theoretischen Physik, die durch einen modellierenden und untersuchenden Umgang mit der Mathematik geprägt ist, lassen sich daher gleich in zweifacher Hinsicht als inadäquat bezeichnen. Einerseits taucht die theoretische Physik im Bild zur Natur der Physik nicht auf, andererseits bestehen unzutreffende Vorstellungen von der Art und Weise des Gebrauchs der Mathematik.

In diesen Ergebnissen ist jedoch auch ein Hinweis auf einen Ansatzpunkt zur Verbesserung enthalten. Es zeigt sich, dass die Vorstellungen zur Rolle der Mathematik zu einem großen Teil auf den Tätigkeiten und Inhalten gründen, die die Schüler im Unterricht erfahren. Dies lässt die Hoffnung zu, dass eine Veränderung der Rolle der Mathematik im Physikunterricht auch positive Effekte auf die Schülervorstellungen zur Rolle der Mathematik — und damit zur Natur der Physik insgesamt — haben kann.

3. Reflexion der Rolle der Mathematik in der Physik

Ein wichtiger Grund für den Erfolg der Wissenschaft Physik liegt in der engen Beziehung zur Mathematik. Aus wissenschaftstheoretischer Perspektive zeigt sich die Verbindung zwischen Physik und Mathematik als sehr fruchtbar und facettenreich (siehe u.a. Poincaré, 1958; Wigner, 1960; Zahar, 1980; Bochner, 1981; Gingras, 2001; Paty, 2003; Boniolo et al., 2005). Die Beschreibung physikalischer Prozesse und Zusammenhänge mittels mathematischer Strukturen lässt sich als einer der charakteristischen Züge der Wissenschaft Physik begreifen.

Ein tieferer Blick offenbart dabei mehrere Aspekte der Rolle der Mathematik in der Physik. Unter einer eher pragmatischen Perspektive lässt sich die Mathematik als Werkzeug zum Quantifizieren auffassen. Weiterhin hat sie eine kommunikative Funktion, so dass sie die Rolle einer Sprache einnimmt[1]. Letztendlich erfüllt sie auch eine strukturierende Funktion, die physikalische Schlussfolgerungen aufgrund logisch deduktiver Herleitungen ermöglicht.

Insbesondere der letztgenannte Aspekt — die strukturierende Funktion — ist als Ausdruck der engen Verbindung zwischen Physik und Mathematik zu verstehen und deutlich von der pragmatischen Perspektive des Quantifizierens abzugrenzen. In diesem Kapitel werden Argumente präsentiert, die die Verflechtung von Physik und Mathematik aufzeigen. Dazu werden in einem ersten Abschnitt einige wissenschaftstheoretische Aspekte zur Mathematisierung der Physik erläutert. Darauf aufbauend lässt sich argumentieren, dass es problematisch ist, eine physikalische Theorie in rein physikalische und rein mathematische Modelle zu trennen. In einem abschließenden dritten Abschnitt werden die Argumente auf den didaktischen Kontext erweitert und Schlussfolgerungen gezogen.

1 Diese Ansicht führt zu der Möglichkeit, die Verbindung zwischen Physik und Mathematik mit Hilfe von Erkenntnissen aus der Linguistik zu untersuchen. Dieser Ansatz wird hier nicht weiter verfolgt, für eine tiefere Analyse aus diesem Blickwinkel sei Redish und Gupta (2010) empfohlen.

Dabei liegt der Hauptfokus der folgenden Erörterungen in der Bedeutung der Mathematik für die Entwicklung der Physik. Es ist allerdings zu beachten, dass sich die enge Verbindung zwischen Physik und Mathematik auch in der Geschichte der Mathematik wiederfindet. Ein kurzer Überblick über einige wichtige mathematische Konzepte zeigt, dass viele aus physikalischen Problemstellungen heraus motiviert sind. Eine kleine Auswahl soll dies verdeutlichen: Der Bereich der Analysis ist praktisch nicht von der Beschreibung von Bewegungen zu trennen (Boyer, 1949); Differentialgleichungen wurden durch die Notwendigkeit motiviert, physikalische Probleme zu lösen (Poincaré, 1958); die Entstehung der Vektoranalysis war stark durch die Mathematisierung des Elektromagnetismus beeinflusst (Crowe, 1967); die Fourieranalyse entstand aus Problemstellungen zur Ausbreitung von Wellen und Wärme (Davis und Hersh, 1981); die Theorie der Distributionen gründet auf der Beschreibung von Punktladungen durch Dirac (Zemanian, 1987).

3.1. Die Mathematisierung der Physik

Viele Physiker sehen mathematische Strukturen als essentiell für eine physikalische Theorie an. Dabei wird die Mathematik weniger in der Rolle eines externen Werkzeugs gesehen, sondern als Sprache der Natur (oder gemäß James Jeans und Paul Dirac sogar als Sprache Gottes). In diesem Sinne hat die Mathematik einen tiefgehenden Einfluss auf den physikalischen Diskurs. Theoretische Herleitungen werden erst durch den deduktiven Charakter der Mathematik ermöglicht, physikalische Gedanken können durch mathematische Analogien strukturiert und angeleitet werden. Bei der Abstraktion und Generalisierung physikalischer Zusammenhänge ist die Mathematisierung ein unabdingbarer Prozess, der Einsichten in neue Strukturen ermöglicht und zu neuen physikalischen Erkenntnissen führt.

Gingras (2001) vertritt in dem Artikel „What did mathematics do to physics?“ aus einer historischen Perspektive die Aussage, dass physikalische Formulierungen von Grund auf mathematisch seien. In der Tat ist es schwierig, die führenden Wissenschaftler des siebzehnten und achtzehnten Jahrhunderts — wie z.B. Newton, Euler, Lagrange, Fourier, Bernoulli und andere — klar in Mathematiker und Physiker zu unterteilen. Anhand von Gingras’ Differenzierung dreier wichtiger Auswirkungen der Mathematisierung der Physik wird die enge Verbindung beider Wissenschaften spezifiziert (Gingras, 2001, S. 385):

1. Sozial: Die Verwendung der Mathematik trug dazu bei, eine „private“ Wissenschaft zu erschaffen, an der es nur möglich sei teilzuhaben, wenn man über ein angemessenes mathematisches Wissen verfüge.
2. Epistemologisch: Die Mathematisierung der Physik habe die Bedeutung des Begriffs „Erklärung“ verändert. Die Auffassung, ein physikalisches Phänomen nur durch den physikalischen Mechanismus zu erklären, sei in zunehmendem Maße durch die Notwendigkeit ersetzt worden, eine mathematische Repräsentation liefern zu können.
3. Ontologisch: Die Mathematisierung habe dazu geführt, dass einige „Substanzen“ verschwanden, wie z.B. elektrische Flüssigkeiten oder der Äther. Durch die mathematische Repräsentation seien diese Hilfskonstruktionen überflüssig geworden.

Insbesondere die epistemologische Auswirkung ist hier von besonderem Interesse, da sie sich auf den Charakter physikalischen Denkens bezieht. Der Begriff der physikalischen Erklärung ist demnach als physikalisch-mathematisch aufzufassen. Die Bedeutung der mathematischen Strukturen für physikalische Erklärungen als Erweiterung der Erkenntnismöglichkeiten zeigt sich in folgendem Zitat von D’Alembert zur Mathematisierung der Hydrodynamik:

> **It is only with the help of these calculations** that we can penetrate inside Fluids, and discover the play of their parts, the actions that mutually exert, the ones on the others, these innumerous atoms of which a Fluid is composed, and that appear at the same time united and divided, dependent and independent the ones from the others. (D’Alembert, in Paty, 2003, S. 117, eigene Hervorhebung)

An historischen Fallstudien lässt sich die enorme Bedeutung der mathematischen Repräsentation physikalischer Zusammenhänge nachvollziehen. So gelangt Zahar (1980) zu dem Schluss, dass physikalische Prinzipien durch die Einbettung in mathematische Strukturen zu stärkeren physikalischen Aussagen würden. Rivadulla (2005) geht noch einen Schritt weiter. Aus einer Analyse der Entwicklung theoretischer Erklärungen zur Spektralverteilung des Wasserstoffatoms und zum Planck’schen Strahlungsgesetz leitet er die Schlussfolgerung ab, dass physikalische Konstrukte nur dann eine theoretische Erklärung erhalten können, wenn es möglich sei, sie mathematisch aus einem höheren physikalischen Konstrukt herzuleiten (Rivadulla, 2005, S. 166). Diese Ansicht ist stark beeinflusst durch die Anwendung deduktiver Methoden in der Physik, wie sie in den Arbeiten von Galilei, Newton oder Fresnel zu finden sind. Die Möglichkeit deduktiver

Schlussfolgerungen stellt dabei eine wichtige Konsequenz der oben erwähnten epistemologischen Auswirkung der Mathematisierung der Physik dar.

Auch Einstein (1934, S. 110) betont, dass die Methode des theoretischen Physikers generelle Postulate — sogenannte Prinzipien — als Basis erfordere, um daraus theoretische Schlussfolgerungen herleiten zu können. Darüber hinaus schreibt er der Mathematik eine essentiell Erkenntnis bringende Funktion zu:

> Nach unserer bisherigen Erfahrung sind wir nämlich zum Vertrauen berechtigt, **dass die Natur die Realisierung des mathematisch denkbar Einfachsten ist**. Durch rein mathematische Konstruktion vermögen wir nach meiner Überzeugung diejenigen Bergriffe und diejenige gesetzliche Verknüpfung zwischen ihnen zu finden, die den **Schlüssel für das Verstehen der Naturerscheinungen liefern**. Die brauchbaren mathematischen Begriffe können durch Erfahrung wohl nahegelegt, aber keinesfalls aus ihr abgeleitet werden. Erfahrung bleibt natürlich das einzige Kriterium der Brauchbarkeit einer mathematischen Konstruktion für die Physik. **Das eigentlich schöpferische Prinzip liegt aber in der Mathematik.** (Einstein, 1934, S. 117, eigene Hervorhebung)

Einstein sieht in der mathematischen Struktur der Physik sogar das entscheidende Element für das Verstehen der Naturerscheinungen. In der mathematischen Beschreibung und Untersuchung der physikalischen Zusammenhänge liege ein schöpferischer und kreativer Akt, durch den es möglich sei, die Natur als „Realisierung des mathematisch denkbar Einfachsten“ zu ergründen. Diese Einschätzung Einsteins stellt eine tiefe Verflechtung von physikalischem und mathematischem Denken fest, die auf eine inhärent mathematische Natur der physikalischen Erkenntnisgewinnung hindeutet.

Ein weiterer Aspekt der Anleitung des physikalischen Denkens durch die Mathematik liegt in der Verwendung von Analogien. Durch ähnliche mathematische Strukturen treten *formale Analogien* zu Tage. Nach Hesse (1966) sind dies Analogien, bei denen zwischen den Subjekten und Objekten ähnlicher Systeme die gleichen axiomatischen und deduktiven Relationen bestehen, wobei eine materielle Ähnlichkeit nicht notwendig ist. Dadurch ist es möglich, zum Beispiel über Elektrizität als Flüssigkeit, über Licht als Welle oder über einen elektrischen Schwingkreis als mechanisches Feder-Masse-System nachzudenken.

Feynman (2007, S. 209) bringt die Bedeutung des Denkens in Analogien in seinen Vorlesungen über Physik ebenfalls zum Ausdruck. Er betont es als „bemerkenswerte Koinzidenz“, dass viele Gleichungen für viele verschiedene physikalische Fälle die gleiche Form haben. Dadurch erhalte man durch die Untersuchung eines Themas gleichzeitig sehr viel Wissen über die Lösungen von Gleichungen auf anderen Gebieten. Diese Möglichkeiten, die durch formale Analogien bereitgestellt werden, sind direkt mit der Mathematisierung der Physik verknüpft. Mit einer rein qualitativen Beschreibung physikalischer Phänomene wäre diese Art des Schlussfolgerns nicht möglich.

Der vielleicht beeindruckendste Beleg für die enge Verflechtung von mathematischer Beschreibung und physikalischer Realität tritt auf, wenn mathematische Strukturen physikalisch interpretiert werden und dadurch zu neuen Entdeckungen führen. Heinrich Hertz drückt sein Staunen über die Kraft mathematischer Gleichungen folgendermaßen aus:

> Man kann diese wunderbare Theorie nicht studieren, ohne bisweilen die Empfindung zu haben, als wohne den mathematischen Formeln selbständiges Leben und eigener Verstand inne, als seien dieselben klüger als wir, klüger sogar als ihr Erfinder, **als gäben sie mehr heraus, als seinerzeit in sie hineingelegt wurde** (Hertz, 1895, S. 344, eigene Hervorhebung).

In der Tat ist es ein beeindruckendes Beispiel für die Vorhersagekraft mathematischer Gleichungen, wenn aufgrund der mathematischen Untersuchung physikalischer Zusammenhänge neue physikalische Dinge entdeckt werden, von deren Existenz vorher noch nichts bekannt war. So hat Dirac die negativen Lösungen seiner relativistischen quantenmechanischen Gleichungen als Antiteilchen interpretiert und somit deren Existenz postuliert (Steiner, 1998). Vier Jahre später wurde das Positron dann experimentell entdeckt. Weitere Beispiele, in denen die Mathematik gewissermaßen der empirischen Welt voraus war, sind die Vorhersage der elektromagnetischen Wellen und der konstanten Lichtgeschwindigkeit aus den Maxwell-Gleichungen (Darrigol, 2000) sowie die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie Einstein’s, mit denen die Vorstellungen von grundlegenden physikalischen Konzepten wie Zeit und Raum revolutioniert wurden. Auch hier folgte die empirische Validierung erst in den folgenden Jahren durch korrekt vorhergesagte Messergebnisse.

3.2. Unterscheidung zwischen physikalischem und mathematischem Modell

Aufgrund der Komplexität der Natur — oder der Beschränkung des menschlichen Geistes — ist das Denken in Modellen ein wesentliches Merkmal physikalischer Erkenntnis. Es besteht mittlerweile eine große Übereinstimmung in der Auffassung, dass die Realität nicht direkt, sondern nur durch vereinfachte und idealisierte Modelle wahrgenommen werden kann (Hesse, 1953; Bunge, 1973; Redhead, 1980; Nersessian, 1992). Wenn es allerdings um die Interpretation der Rolle der Mathematik in diesem Prozess geht, lassen sich unterschiedliche Beschreibungen finden.

Ein Versuch, den Modellierungsprozess in der Physik zu beschreiben, findet sich bei Greca und Moreira (2001). Das Modell dieser Autoren unterscheidet die physikalischen Theorien in physikalische und mathematische Modelle, welche als getrennte Objekte fungieren. Das physikalische Modell beinhaltet die Menge der Aussagen eines vereinfachten und idealisierten physikalischen Systems, während das mathematische Modell die syntaktische Struktur des Formalismus liefere, ohne einen semantischen Inhalt zu besitzen. Das mathematische Modell ist also ein axiomatisches System, das Bedeutung erst dadurch erhält, dass es im Rahmen des physikalischen Modells interpretiert wird.

Aufgrund der im vorigen Abschnitt präsentierten Argumente erscheint die klare Trennung eines physikalischen Modells von einem mathematischen Modell als problematisch, da sie die Auffassung einer geschlossenen physikalischen Theorie ohne Mathematik impliziert. In diesem Bild werden physikalische Zusammenhänge durch ein rein qualitatives physikalisches Modell repräsentiert, das gegebenenfalls durch ein externes mathematisches Modell erweitert wird, falls quantitative Resultate erwünscht sind. Das mathematische Modell ist dann bloß eine Repräsentation in quantitativer mathematischer Sprache.

Diese klare Trennung scheint im Widerspruch zu dem essentiell mathematischen Charakter der Physik zu stehen. Vielmehr ist es oftmals schwierig, eine klare Trennlinie zwischen einem physikalischen und einem mathematischen Modell zu ziehen. Betrachtet man beispielsweise die geometrische Repräsentation eines Lichtstrahls als Linie oder von Kräften als Vektoren, so besteht gleich zu Beginn ein gewisser Grad an Mathematisierung. Eine Repräsentation durch ein physikalisch-mathematisches Modell erscheint somit passender.

Diese Ansicht wird auch von Hesse (1953) vertreten. Es sei nicht förderlich, eine scharfe

Trennlinie zwischen rein mechanischen, elektrischen oder hydrodynamischen und rein mathematischen Modellen zu ziehen. Ihre Hauptargumente gegen diese Trennung sind:

1. Es gibt viele Arten von Hybriden:

   > [...] like the Bohr model of the atom in which electrons are conceived to jump discontinuously from one orbit to another, a feat which no mechanical particle can be imagined to perform; and the conception of curvature of three-dimensional space, which cannot be imagined apart from the mathematical formulation. [...] **Current physical usage seems to sanction the use of "model" for all such cases whether physically imaginable or not** (Hesse, 1953, S. 200, eigene Hervorhebung).

2. Ziel ist ein umfassenderes Konzept von Modellen:

   > [...] the main justification for the use of the word "model" in the wide sense is the fact that **theories of a purely mathematical kind may function in essentially the same way as physically imaginable models**, in being capable of suggesting further lines of development in the explanation of the experimental facts. It is sometimes possible to label models unequivocally as "mechanical", "electrical", "mathematical" and so on, but more usually **a model will be a mixture of several types** (Hesse, 1953, S. 200, eigene Hervorhebung).

Eine ähnliche Sicht zur Künstlichkeit der Trennung in physikalisches und mathematisches Modell findet sich in dem von Boniolo und Budinich (2005) vorgeschlagenen Modell. Die Autoren fassen eine physikalische Theorie als ein „physical-mathematical sign" auf, das das Objekt (die physikalische Welt) mit dem Interpreten (dem Physiker) verbindet. Physikalischen Theorien könne Mathematik nicht als etwas Externes zugeschrieben werden, sie seien inhärent mathematisch.

Für eine Trennung in physikalische und mathematische Modelle könnte angeführt werden, dass qualitative Modelle durchaus existieren. Betrachtet man beispielsweise ein Gas als eine Ansammlung von kleinen Bällen, die gegeneinander prallen, so hat man ein rein qualitatives physikalisches Modell, für das die bisherigen Argumente zur intrinsischen mathematischen Natur nicht zutreffen. Sobald man diese Beschreibung jedoch ausbaut, mit dem Ziel, physikalische Zusammenhänge zu beschreiben und Vorhersagen zu machen, muss man physikalische Konzepte einführen: die Bälle erhalten Massen, werden in Raum und Zeit positioniert, bekommen Geschwindigkeiten und Impulse und üben Kräfte und Druck aus. Damit betritt man jedoch den Bereich physikalischer Theorien und die Trennung von der Mathematik wird problematisch. Physikalische Konzepte wie Geschwindigkeit und Kraft sind eng mit mathematischen Strukturen verknüpft, so dass deren Verwendung automatisch mit einem gewissen Grad an Mathematisierung einhergeht (siehe auch folgenden Abschnitt). Daher erscheint es angemessener, das rein qualitative Modell als das erste Niveau eines physikalisch-mathematischen Modells zu sehen, anstatt ihm eine eigene, vom restlichen Modell getrennte, Existenz zuzuschreiben.

3.3. Didaktische Perspektive

Unter der Prämisse, dass es auch ein Ziel des Physikunterrichts ist, ein angemessenes Bild über die Natur der Physik zu vermitteln (siehe Kapitel 2.6), sollten die dargelegten wissenschaftstheoretischen Überlegungen einen Einfluss auf den Physikunterricht haben. Allerdings gibt es abseits dieser Argumentationslinie bereits im didaktischen Kontext gewichtige Argumente, die die enge Verbindung von Physik und Mathematik bestätigen. So ist bei einigen grundlegenden physikalischen Konzepten eine Trennung in Mathematik und Physik nicht aufrecht zu erhalten, wie beispielsweise bei den Konzepten Geschwindigkeit und Beschleunigung. Laut Hewitt (2006) ist der Beschleunigungsbegriff so schwierig zu verstehen, da die Beschleunigung die Rate einer Rate ist: Beschleunigung ist die zeitliche Änderungsrate der Geschwindigkeit, die ebenfalls eine Rate ist, nämlich die zeitliche Änderungsrate des Ortes.

Was bedeutet das im Kontext der Diskussion zur Beziehung zwischen Mathematik und Physik? Es tritt ein wichtiger Aspekt zu Tage, der eine offenkundige Relevanz im didaktischen Kontext besitzt: Geschwindigkeit und Beschleunigung sind keine rein physikalischen, sondern bereits auch mathematische Konzepte. Es ist schlicht nicht möglich, diese Begriffe von ihrer Natur als Änderungsraten zu trennen. Wenn es das Ziel des Unterrichts ist, die Konzepte Geschwindigkeit und Beschleunigung zu verstehen, so ist es unabdingbar, sich auch mit einem Verständnis des mathematischen Konzeptes von Raten zu befassen und Erkenntnisse aus der Mathematikdidaktik heranzuziehen (z.B. Orton, 1984; Onslow, 1988; Thompson und Thompson, 1994).

Es gibt bereits einige Untersuchungen, die sich mit genau dieser Schwierigkeit befassen. Taşar (2010) hat die Schwierigkeiten im Verständnis des Geschwindigkeits- und Beschleunigungskonzeptes unter dieser Perspektive untersucht. Besonders beim Verständnis der Beschleunigung zeigten sich Schwierigkeiten, die von der Eigenschaft der Beschleunigung als „doppelter“ Änderungsrate stammen. Basson (2002) schlägt vor, die Verbindung von mathematischen und physikalischen Konzepten unterstützend für das Lernen zu nutzen. Aufgrund der Eigenschaft einiger grundlegender physikalischer Konzepte, aus mathematischen Konzepten zu bestehen, sei es wichtig, eine gemeinsame Lösung aus physik- und mathematikdidaktischen Erkenntnissen zu erarbeiten.

Aufgrund dieser Argumente zeigt sich, dass die konzeptuelle Verbindung von Mathematik und Physik nicht nur in der höheren Wissenschaft besteht, sondern bereits in schulrelevanten Konzepten zum Ausdruck kommt. Die dargelegte Argumentation gegen die Trennung von physikalischem und mathematischem bzw. für ein physikalisch-mathematisches Modell hat daher auch für das Lehren und Lernen von Physik eine Bedeutung. Sowohl die Forderung des Lernens zur „Nature of Science“ als auch die Konsistenz der wissenschaftstheoretischen Argumentation von wissenschaftlichen Theorien bis zu elementaren physikalischen Konzepten spricht für die Beachtung des mathematischen Verständnisses im Physikunterricht.

An dieser Stelle ist es wichtig, einige einschränkende Bemerkungen zu machen. Natürlich kann die Mathematisierung oder die Rolle der Mathematik nicht immer der Hauptfokus im Unterricht sein. In vielen Fällen ist es angebrachter, einem rein qualitativen Ansatz des Physiklernens zu folgen: wenn das Ziel beispielsweise ist, ein physikalisches Phänomen einzuführen und die Neugier der Schüler zu wecken, so ist ein mathematischer Ansatz sicherlich nicht das Mittel der Wahl. Zudem gibt es viele weitere Ziele und Ansätze im Physikunterricht, die ebenfalls einen wichtigen Stellenwert einnehmen sollten. Auch das Niveau der Schüler muss betrachtet werden, wenn die Mathematisierung Thema des Physikunterrichts werden soll. In diesem komplexen Rahmen des Lehrens und Lernens von Physik stellt die Rolle der Mathematik aber einen wichtigen Aspekt dar, dessen Integration in den Unterricht reflektiert werden sollte.

Aufgrund der Komplexität der Beziehung zwischen Mathematik und Physik ist es sinnvoll anzunehmen, dass in der Physik auf unterschiedliche Art und Weise Gebrauch von der Mathematik gemacht werden kann. Wie gezeigt wurde, hat die Verbindung von Mathematik und Physik viele Facetten, von der Möglichkeit, aus der Mathematik heraus neue Physik zu entdecken, bis hin zur mathematisch-physikalischen Natur elementarer Konzepte. Der Hauptpunkt der Diskussion ist, dass diese Aspekte einen charakteristischen Zug der Rolle der Mathematik in der Physik darstellen, der sich von der Funktion des Quantifizierens und Ausrechnens unterscheidet. Um diesen Unterschied zu spezifizieren, ist eine eigene Bezeichnung beider Sichtweisen angebracht. Mit Anlehnung an die Unterscheidung von Pietrocola (2008) wird die enge strukturelle Verbindung von Mathematik und Physik als *strukturelle Rolle* bezeichnet, während dem kalkülorientierten Gebrauch der Mathematik durch die *technische Rolle* Rechnung getragen wird.

Die strukturelle Rolle muss als von der Physik untrennbar angesehen werden. Die technische Rolle bezieht sich dagegen auf rein mathematische Fähigkeiten und existiert daher auch losgelöst von der Physik. In einem didaktischen Kontext ist es sinnvoll, von einer Unterscheidung *technischer* und *struktureller Fähigkeiten* zu sprechen. Die technischen Fähigkeiten beziehen sich demnach auf rein mathematische Manipulationen, während die strukturellen Fähigkeiten das Übersetzen zwischen mathematischen Strukturen und physikalischer Bedeutung beinhalten. In diesem Sinne hat Pospiech (2006) mit ihrer Forderung, dass Schüler die strukturgebende Funktion der Mathematik für physikalische Theorien erkennen sollen, ein Lehren und Lernen der strukturellen Fähigkeiten anvisiert.

Die Gefahr, die physikalische Bedeutung beim mathematischen Arbeiten aus den Augen zu verlieren, wird von Maxwell in einer seiner Vorlesungen verdeutlicht. Es liest sich als ein Plädoyer für die Bedeutung der strukturellen Fähigkeiten:

> [...] as we are engaged in the study of Natural Philosophy **we shall endeavour to put our calculations into such a form that every step may be capable of some physical interpretation, and thus we shall exercise powers far more useful than those of mere calculations — the application of principles, and the interpretation of results.** (Maxwell, in Gingras, 2001, S. 404, eigene Hervorhebung)

Die Unterscheidung zwischen technischen und strukturellen Fähigkeiten ist ein zentraler Punkt in dem Modell zum mathematischen Denken in der Physik, das im folgenden Kapitel erarbeitet wird. Es wird dargelegt, dass die bisher verfügbaren Modelle diese wichtige Unterscheidung nicht in Betracht ziehen. Da mit den strukturellen Fähigkeiten jedoch ein elementar anderer Umgang mit der Mathematik einhergeht, als es bei den technischen Fähigkeiten der Fall ist, sollte diese Unterscheidung in einem didaktischen Modell zum mathematischen Arbeiten in der Physik vorgenommen werden.

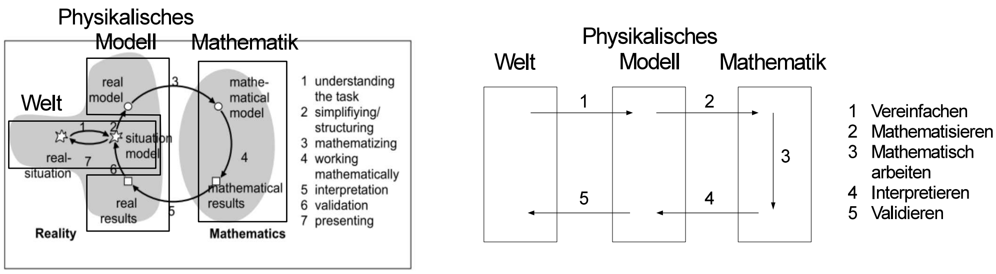
Ein abschließender Hinweis ist noch zu beachten. Die in Kapitel 2.2 erläuterte Unterscheidung zwischen relationalem und instrumentellem Verständnis darf nicht mit der Unterscheidung zwischen strukturellen und technischen Fähigkeiten gleichgesetzt werden. Es besteht ein Zusammenhang in dem Sinne, dass ein relationales Verständnis für die strukturellen Fähigkeiten notwendig ist, während die technischen Fähigkeiten auch mit einem instrumentellen Verständnis benutzt werden können. Das bedeutet im Umkehrschluss, dass ein Lehren der technischen Fähigkeiten auf ein instrumentelles Verständnis abzielt, während das Lehren der strukturellen Fähigkeiten das Lernen von relationalem Verständnis fördert. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die technischen Fähigkeiten gleichbedeutend mit einem instrumentellen Verständnis sind. Auch der Umgang mit der technischen Rolle der Mathematik sollte auf einem relationalen Verständnis basieren.

4. Modellierung mathematischen Denkens in der Physik

Die Diskussion des Modellierungskreislaufs findet sich bereits in Kapitel 2.4. Es liegt nahe, den Modellierungskreislauf auch in der Physik zu benutzen. Allerdings ist aufgrund der im vorigen Kapitel erörterten engen Verflechtung von Mathematik und Physik eine Revision und Ergänzung der Struktur erforderlich. In diesem Kapitel werden in einem ersten Abschnitt die Probleme erläutert, die sich ergeben, wenn der Modellierungskreislauf in den physikalischen Kontext übertragen wird. Darauf aufbauend erfolgt in einem zweiten Abschnitt die Herleitung eines didaktischen Modells, das die im vorigen Kapitel dargelegten Argumente aufgreift und der Verbindung zwischen Physik und Mathematik Rechnung trägt. Die Anwendung des Modells wird an einem Beispiel erläutert. Abschließend werden einige Erweiterungsmöglichkeiten des Modells diskutiert sowie in einer Zusammenfassung ein theoretisches Konzept zum Umgang mit der Mathematik im Physikunterricht formuliert.

4.1. Probleme mit der Übertragung des Modellierungskreislaufs in die Physik

Um den Modellierungskreislauf im physikalischen Kontext zu diskutieren, werden die relevanten Aspekte des Kreislaufs von Blum und Leiß (2005) in ein neues Diagramm übertragen (siehe Abbildung 4.1). Die Struktur des Kreislaufs bleibt erhalten, allerdings beschränkt sich der Anwendungsbereich auf die Physik und die Übersetzungsprozesse stehen im Fokus. Man erhält einen Kreislauf, der die Bereiche der Welt, das physikalische Modell und die Mathematik repräsentiert. Die Übersetzungsprozesse vermitteln zwischen den drei Bereichen: Vereinfachen und Validieren verbinden die Welt mit dem physikalischen Modell, während Mathematisieren und Interpretieren die Verbindung



(a) (b)

Abbildung 4.1.: Modellierungskreislauf (a) von Blum und Leiß (2005) mit den markierten Bereichen „Welt“, „Physikalisches Modell“ und „Mathematik“, (b) übertragen in ein neues Diagramm, das die wichtigsten Aspekte hervorhebt.

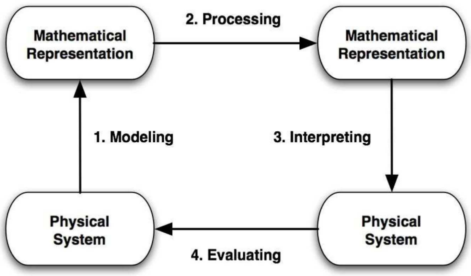


Abbildung 4.2.: Modellierungskreislauf für die Physik von Redish und Bing (2009).

zwischen physikalischem Modell und Mathematik herstellen. Der Prozess des mathematischen Arbeitens ist innerhalb der Mathematik verortet, was bedeutet, dass er rein mathematische Arbeit repräsentiert.

Ein Beispiel eines in der Physikdidaktik benutzten Modellierungskreislaufs ist bei Redish und Bing (2009) zu finden (siehe Abbildung 4.2). Die Analogie zum obigen übertragenen Kreislauf (Abbildung 4.1b) ist offensichtlich, nur die Unterscheidung zwischen der Welt und dem physikalischen Modell wird vernachlässigt. Der Modellierungsprozess stellt sich wie folgt dar: Der Ausgangspunkt ist das physikalische System, das untersucht werden soll. Dieses wird in eine mathematische Repräsentation übersetzt um mathematisch damit arbeiten zu können. Die erhaltenen mathematischen Resultate müssen im Rahmen des physikalischen Modells interpretiert werden. Abschließend werden die physikalischen Ergebnisse auf ihre Sinnhaftigkeit in Bezug zum Ausgangsproblem validiert.

Der Modellierungskreislauf liefert auf dieser Ebene durchaus eine brauchbare Beschreibung der Modellierungsvorgänge in der Physik. Allerdings wird dabei eine Trennung zwischen physikalischem und mathematischem Modell vorgenommen und die Möglichkeiten zur detaillierten Betrachtung verschiedener Aspekte mathematisch-physikalischen Denkens sind beschränkt. So ist einerseits die Unterscheidung zwischen technischen und strukturellen Fähigkeiten, andererseits eine genauere Auflösung der Übersetzung zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischen Strukturen, nicht zufriedenstellend mit dem Modellierungskreislauf zu bewerkstelligen. Dieser stellt bloß die Unterscheidung zwischen den Prozessen Mathematisieren, Interpretieren und reiner mathematischer Arbeit zur Verfügung.

Anhand des Beispiels zweier physikalischer Größen A und B, die proportional zueinander sind, lässt sich das Problem veranschaulichen. Man stelle sich Schüler vor, die über die physikalische Situation diskutieren und dann versuchen, ihre Gedanken zu präzisieren. Folgende Aussagen könnten gemacht werden:

- Je größer A, desto größer B.
- $A \sim B$
- $A = const \cdot B$

Die Aussagen beinhalten einen zunehmenden Grad an Mathematisierung und es ist eine strukturelle Fähigkeit, sie zu äußern — wenn es im Kontext physikalischer Argumentation geschieht. Bei einer Abbildung dieser Prozesse mit dem Modellierungskreislauf könnten alle Aussagen als Mathematisierungsprozesse eingeordnet werden. Damit wäre ihre Rolle als strukturelle Fähigkeiten von der rein mathematischen Arbeit — die als technische Fähigkeit verstanden werden kann — abgegrenzt, eine Differenzierung zwischen den drei Aussagen wäre dagegen nicht möglich. Als Alternative könnte die dritte Aussage auch als rein mathematische Übersetzung von der zweiten Aussage in eine mathematische Gleichung verstanden werden. Dies würde jedoch die Unterscheidung zwischen strukturellen und technischen Fähigkeiten aufgeben, und eine Differenzierung zwischen der ersten und zweiten Aussage wäre ebenfalls noch nicht erreicht. Wie man es dreht und wendet, sowohl eine Differenzierung der Mathematisierung als auch eine Unterscheidung zwischen strukturellen und technischen Fähigkeiten ist mit dem Modellierungskreislauf nicht zufriedenstellend möglich.

Ein weiterer kritischer Punkt taucht auf, wenn der Modellierungskreislauf direkt unterrichtet wird, um die Modellierungskompetenz zu fördern oder wenn sich Lehrer bei der Konzeption von Aufgaben und Unterrichtseinheiten auf den Kreislauf stützen (vgl. S. 31). In diesen Fällen transportiert der Modellierungskreislauf auch ein Bild von der

Rolle der Mathematik in der Physik und kann damit sowohl Schüler als auch Lehrer in ihren Vorstellungen beeinflussen. Aus diesem Grund sollte der Anspruch bestehen, dass das zu diesen Zwecken eingesetzte Modell ein angemessenes Bild von der Natur der Physik repräsentiert und weiterhin Anregungen für einen sinnvollen Umgang mit der Mathematik bietet.

Wie im vorherigen Kapitel ausführlich dargelegt, ist es von der Natur der Physik her angemessener, das Zusammenspiel von Mathematik und Physik als Einheit zu betrachten. Die Verwendung eines physikalisch-mathematischen Modells bildet diese Verflechtung besser ab als die Auftrennung in ein physikalisches und ein mathematisches Modell, wie es im Modellierungskreislauf der Fall ist. Zudem würde eine klare Unterscheidung zwischen strukturellen und technischen Fähigkeiten sowie eine Differenzierung verschiedener Grade der Mathematisierung diese substantiellen Aspekte des physikalisch-mathematischen Denkens in den Fokus rücken. Damit könnte eine Unterstützung bereit gestellt werden, einen auf Verständnis basierenden Umgang mit der Mathematik anzustreben und sich von den altbekannten Rechenaufgaben zu lösen. Der Modellierungskreislauf kann diesen Anforderungen aufgrund der diesbezüglich fehlenden Genauigkeit und Auflösung nur beschränkt nachkommen.

4.2. Physikalisches Mathematisierungsmodell und revidierter Modellierungskreislauf

Aus der vorgenommenen Analyse einer Übertragung des Modellierungskreislaufs in die Physik lassen sich die Forderungen für ein angemesseneres Modell ableiten. Das Ziel ist ein Modell, das die enge Verflechtung von Mathematik und Physik verkörpert und zudem eine Unterscheidung zwischen technischen und strukturellen Fähigkeiten ermöglicht. Das Modell sollte die Entwicklung und Differenzierung der strukturellen Fähigkeiten in den Fokus stellen, um deren charakteristische Bedeutung für die Rolle der Mathematik in der Physik zu betonen. Die im vorigen Abschnitt erwähnten Kritikpunkte sind eng mit der Trennung des physikalisches Modells von der Mathematik verbunden. Daher wird für diesen Teil des Kreislaufs ein alternatives Modell entwickelt — das physikalische Mathematisierungsmodell. Dieses Modell kann sowohl selbstständig verwendet werden als auch später wieder durch eine Verbindung zur „Welt“ in den Modellierungskreislauf eingegliedert werden — mit dem Resultat eines revidierten Modellierungskreislaufs für die Physik.

Einen wichtigen Leitgedanken bei der Konstruktion des physikalischen Mathematisierungsmodells stellen die wissenschaftstheoretischen Argumente dar. Die Verflechtung zwischen Physik und Mathematik muss in dem Modell enthalten sein, allerdings darf darüber die rein mathematische Arbeit und das qualitative physikalische Verständnis nicht vernachlässigt werden. Das Modell benötigt daher einen gemeinsamen physikalisch-mathematischen Teil — wie auch das „physical-mathematical sign" von Boniolo und Budinich (2005) — als auch ein qualitativ physikalisches Element und einen rein mathematischen Bereich. Dies würde eine Unterscheidung zwischen der technischen und strukturellen Rolle der Mathematik in der Physik ermöglichen. Die strukturellen Fähigkeiten gehören zu dem physikalisch-mathematischen Teil, die technischen zu dem rein mathematischen.

Weiterhin soll eine Differenzierung der strukturellen Fähigkeiten erfolgen. Die Übersetzungsprozesse des Mathematisierens und Interpretierens müssen dafür näher aufgelöst werden. Bei dem obigen Beispiel der unterschiedlichen Aussagen zur Proportionalität würde eine Differenzierung der Aussagen „$A \sim B$" und „$A = const \cdot B$" eine Differenzierung des Mathematisierungsgrades bedeuten. Diese Idee lässt sich durch die Einführung einer Dimension der Mathematisierung in dem Modell realisieren. Wenn ein Pfeil, der den Mathematisierungs- oder Interpretationsprozess repräsentiert, unterschiedliche Längen in dieser Dimension annehmen kann, so kann dadurch zwischen unterschiedlichen Niveaus der Mathematisierung differenziert werden.

Abbildung 4.3 zeigt die graphische Darstellung des physikalischen Mathematisierungsmodells. Es enthält ein physikalisch-mathematisches Modell sowie einen rein mathematischen Bereich. Die Struktur des physikalisch-mathematischen Modells ist durch (unendlich viele) Niveaus tiefer aufgelöst. Jedes Niveau repräsentiert das Modell zu einem bestimmten Mathematisierungsgrad. Die Höhe des Rechtecks spiegelt die Dimension der Mathematisierung wider. Der qualitativen Physik wird durch die unterste Ebene des physikalisch-mathematischen Modells Rechnung getragen. Auf diesem Niveau beträgt der Mathematisierungsgrad Null, d.h. es ist keine Mathematik enthalten. Es ist allerdings mit den höher mathematisierten Niveaus eng verbunden. Als wichtiger Unterschied zum traditionellen Modellierungskreislauf ist festzuhalten, dass die qualitative Physik nicht als eigenständiges Modell vorkommt.

Aufgrund dieser Struktur des physikalischen Mathematisierungsmodells sind die Übersetzungsprozesse des Mathematisierens und Interpretierens bereits in dem physikalisch-mathematischen Modell enthalten: Eine Bewegung entlang der Mathematisierungsdi-

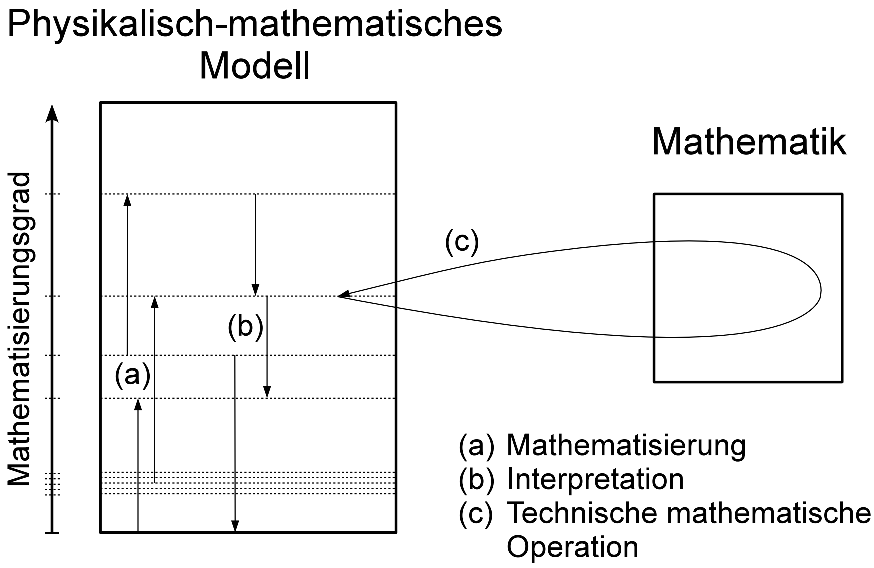


Abbildung 4.3.: Physikalisches Mathematisierungsmodell zum Modellieren mathematischen Denkens in der Physik

mension bzw. die Verbindung unterschiedlicher Niveaus repräsentiert einen Übersetzungsprozess. Die Pfeile „(a)“ in Abbildung 4.3 stehen für das Mathematisieren, die Pfeile „(b)“ für das Interpretieren. Durch eine Justierung der Länge eines Pfeils ist es möglich, zwischen verschiedenen Graden der Mathematisierung zu differenzieren. Wieder auf das Beispiel der Aussagen zur Proportionalität bezogen, würde die Aussage „Je größer A, desto größer B“ auf einem niedrigeren Niveau liegen als die Aussage $A \sim B$, welche wiederum unterhalb von $A = const \cdot B$ angeordnet werden würde.

An dem Konzept der Geschwindigkeit lassen sich die unterschiedlichen Niveaus ebenfalls gut veranschaulichen. Die Aussage „Geschwindigkeit ist Strecke durch Zeit“ hat einen niedrigeren Mathematisierungsgrad als die Formel $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ und würde daher auf einem niedrigeren Niveau liegen. Diese Formel würde wiederum unterhalb des Niveaus angeordnet werden, das für die Vektorschreibweise $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ steht. Es ist allerdings in anderen Fällen nicht immer einfach, eine hierarchische Ordnung der Mathematisierungsgrade vorzunehmen. Einige generelle Aspekte, an denen man sich orientieren kann, sind die Exaktheit, Komplexität und Gültigkeit der mathematischen Repräsentationen. Zusätzlich kann eine historische Analyse ein sinnvoller Leitfaden sein.

Soll ein Übersetzungsprozess in dem Modell abgebildet werden, so ist ein Pfeil einzuzeichnen, der zwei Niveaus miteinander verbindet. Wird ein physikalischer Sachverhalt mathematisiert, so geht der Pfeil von dem tieferen Niveau zu dem höheren. Dies kann der Fall sein, wenn ein physikalischer Zusammenhang mit Hilfe einer Gleichung ausgedrückt wird. Aber auch die schrittweise mathematische Präzisierung von physikalischen Konzepten und Zusammenhängen stellen Mathematisierungen dar — bei mehreren Schritten sind dementsprechend mehrere Pfeile zu zeichnen. Werden dagegen Gleichungen interpretiert, so zeigt der Pfeil von dem höheren Niveau zu dem tieferen. Diese Prozesse sind mit dem „Lesen" von Gleichungen verbunden — dem sprachlichen oder graphischen Ausdrücken ihrer Bedeutung. Auch das Identifizieren von Grenzfällen oder das Vorhersagen physikalischen Verhaltens gehört zum Interpretieren. Als eindrucksvolles Beispiel dieser Fähigkeit sei an dieser Stelle noch einmal die Vorhersage von Antiteilchen durch Dirac in Erinnerung gerufen.

Der Pfeil „(c)" steht für die rein mathematischen Aspekte. Er repräsentiert die technischen Fähigkeiten wie beispielsweise Rechnungen, die Anwendung von algorithmischen Regeln (Variablen isolieren, Brüche umstellen, Differenzieren oder Integrieren, eine Gleichung auflösen, u.ä.) oder das Nachschlagen von Zusammenhängen in einem Tafelwerk. Es ist möglich, diese Prozesse durchzuführen, ohne Bezug zur Physik zu nehmen. Daher werden sie in dem physikalischen Mathematisierungsmodell durch einen Pfeil repräsentiert, der das physikalisch-mathematische Modell verlässt und zum rein mathematischen Bereich führt. Wichtig zu beachten ist, dass der Pfeil wieder am Ausgangspunkt endet, da er für keinen physikalischen Inhalt steht und auch keinen Übersetzungsprozess im Sinne der strukturellen Fähigkeiten darstellt. Durch die klare Unterscheidung der Pfeile, die innerhalb des physikalisch-mathematischen Modells lokalisiert sind — „(a)" und „(b)" — und dem geschwungenen Pfeil, der die Physik verlässt und zur Mathematik führt, wird der unterschiedliche Charakter der strukturellen und technischen Fähigkeiten deutlich zum Ausdruck gebracht.

Letztendlich ist es noch möglich, das physikalische Mathematisierungsmodell in die Struktur des Modellierungskreislaufs zu integrieren und somit einen revidierten Kreislauf für die Physik zu erhalten. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Die Pfeile „(d)" und „(e)" markieren die Verbindung zwischen dem Rest der Welt und dem physikalisch-mathematischen Modell. Pfeil „(d)" steht dabei für die Idealisierung, also die physikalische Modellierung und Vereinfachung realer Phänomene. Pfeil „(e)" zeigt den gegenläufigen Prozess an — die Validierung —, der die Bewertung der Ergebnisse der physikalisch-mathematischen Modellierung in Bezug zur Realität repräsentiert. Ein wichtiger Aspekt ist, dass die Verbindung immer zwischen der Welt und dem untersten Niveau des physikalisch-mathematischen Modells hergestellt wird. Durch eine

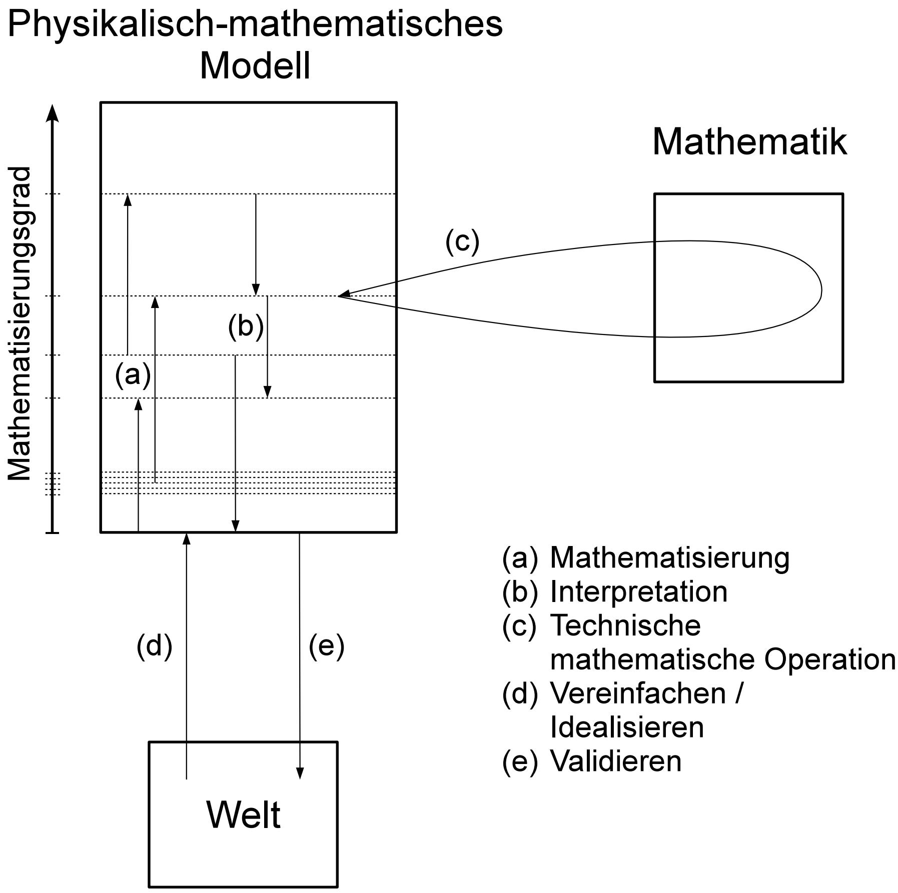


Abbildung 4.4.: Auf dem physikalischen Mathematisierungsmodell basierender revidierter Modellierungskreislauf.

Idealisierung erhält man zuerst ein qualitatives Modell, welches dann schrittweise mathematisiert wird. Ebenso ist der letzte Schritt vor einer Validierung die Übersetzung der Ergebnisse in sprachlich qualitative Aussagen, die anschließend mit der Realität abgeglichen werden können.

Vergleicht man den revidierten Modellierungskreislauf mit der Abbildung 4.1b, so wird deutlich, dass alle Prozesse des traditionellen Kreislaufs auch in dem revidierten vorkommen, allerdings auf eine neue Art strukturiert sind. Die Auflösung kognitiver Prozesse, wie es in dem Modellierungskreislauf von Blum und Leiß (2005) der Fall ist (siehe Abbildung 4.1a), ist durch Einfügen der mentalen Modelle ebenfalls zu realisieren.

Als letzter Punkt sei noch erwähnt, dass durch die neue Strukturierung der Prozesse im revidierten Modellierungskreislauf die zeitliche Reihenfolge der Prozesse besser abgebildet wird. Es ist möglich, zwischen den Prozessen des Mathematisierens und Interpretierens zu wechseln, ohne Zwischenschritte vornehmen zu müssen. Insgesamt sind die Prozesse flexibel angeordnet und nicht durchnummeriert. Auch wenn der traditionelle Modellierungskreislauf nicht als chronologisches Modell zu verstehen ist, so könnte er doch teilweise so aufgefasst werden und zu Fehlinterpretationen verleiten. Diese Problematik ist in dem revidierten Kreislauf für die Physik zumindest abgeschwächt.

4.3. Veranschaulichung an einem Beispiel

Das im vorigen Abschnitt erarbeitete Modell soll als theoretischer Rahmen dienen, wenn es um mathematisches Arbeiten in der Physik und im Physikunterricht geht. Der Einsatzbereich kann vielfältig sein: Dozenten, die physikalische Konzepte erklären, Lehrer, die ihren Unterricht planen oder Physikdidaktiker (und Lehrer), die neue Aufgaben entwickeln oder das Verständnis von Schülern analysieren wollen. Allen diesen Fällen gemeinsam ist die Notwendigkeit, eine zu Grunde liegende konzeptuelle Orientierung bezüglich der Rolle der Mathematik in der Physik zu haben. Diese Funktion kann das vorgeschlagene physikalische Mathematisierungsmodell erfüllen. Um zu veranschaulichen, wie durch die Anwendung des Modells wichtige Aspekte des mathematischen Charakters der Physik aufgezeigt werden und der Lehr-Lern-Prozess angeleitet werden kann, wird die Verwendung anhand eines Beispiels gezeigt. Es werden zwei unterschiedliche Ansätze verglichen, wie ein physikalisches Problem angegangen und erklärt werden kann. Durch den Vergleich eines „didaktischen“ mit einem „abstrakten“ Ansatz anhand des Modells wird die unterschiedliche Art und Weise der Verwendung der Mathematik deutlich.

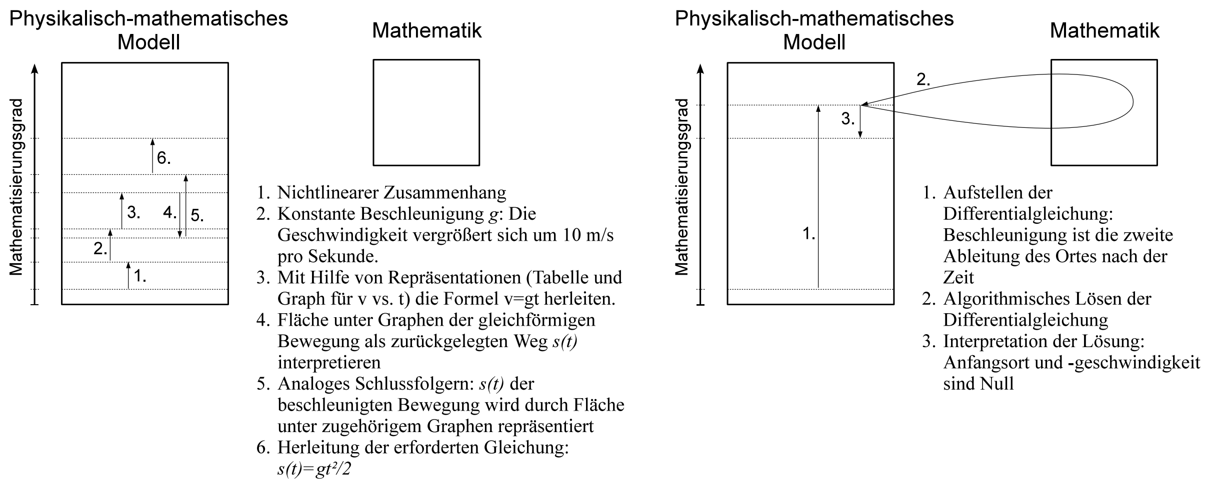
Aufgrund der Bedeutung des freien Falls als Standardbeispiel im Physikunterricht bietet sich eine diesbezügliche Aufgabe zur Veranschaulichung des physikalischen Mathematisierungsmodells an. In dem gewählten Beispiel geht es um die Beschreibung der Bewegung eines Körpers, der aus einer bestimmten Höhe fallen gelassen wird und aufgrund der Gravitation beschleunigt ($g = 10$ m/s^2). Das Ziel ist, die Position des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit zu bestimmen ($s = s(t)$)[1].

1 Eine mögliche Schwierigkeit für Schüler kann in dem Unterschied zwischen der Position des Körpers ($s(t)$) und der zurückgelegten Strecke ($s(t) - s(0)$) bestehen. Wenn allerdings die Anfangsposition Null gesetzt wird ($s(0) = 0$), gibt die Position auch die zurückgelegte Strecke an. Für den didaktischen Ansatz wird diese Konvention übernommen und $s(t)$ als zurückgelegte Strecke bezeichnet. In einer realen Unterrichtssituation muss dieser Aspekt natürlich besprochen werden.

Als wichtige Bemerkung zu Beginn ist zu erwähnen, dass dieses Problem bereits idealisiert ist. Der Körper wird als Punktmasse behandelt und der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Zudem ist eine gewisse Mathematisierung vorhanden, da Zeit und Ort durch die Menge der realen Zahlen repräsentiert werden. Aus diesem Grund beginnt die Behandlung der Aufgabe auf einem bereits mathematisierten Niveau in dem physikalisch-mathematischen Modell (vergleiche mit Abbildung 4.5).

Der didaktische Ansatz besteht aus einer schrittweisen Mathematisierung. Als erster Schritt muss verdeutlicht werden, dass die Bewegung des Körpers nicht linear ist: Je mehr Zeit vergeht, desto schneller wird der Körper, so dass er größere Strecken in gleichen Zeiteinheiten zurücklegt. Das Erkennen dieser Nicht-Linearität — die eine elementare Eigenschaft der beschleunigten Bewegung ist — ist bereits eine Bewegung entlang der Mathematisierungsdimension. Die Identifizierung als konstante Beschleunigung steht allerdings noch aus.

Dieser Schritt wird vollzogen, indem erkannt wird — beispielsweise mit Hilfe eines Experiments oder einer Simulation —, dass die Geschwindigkeit um 10 m/s *pro Sekunde* zunimmt. Diese konstante Änderungsrate, die Beschleunigung genannt wird, beschreibt den Zuwachs der Geschwindigkeit. Die Einheit dieser Rate ergibt sich automatisch als m/s^2 aufgrund der Änderung von m/s pro Sekunde. Ein weiterer Schritt in der Mathematisierung ist somit getan: Die Änderung der Geschwindigkeit wurde als konstant



(a) Didaktischer Ansatz (b) Abstrakter Ansatz

Abbildung 4.5.: Vergleich des didaktischen Ansatzes (a) mit dem abstrakten Lösungsweg (b) innerhalb des physikalischen Mathematisierungsmodells.

erkannt und der Wert dieser konstanten Änderungsrate als $g = 10\ \mathrm{m/s}^2$ bestimmt.

In einem nächsten Schritt kann die konstante Änderungsrate der Geschwindigkeit mit Hilfe verschiedener Repräsentationen dargestellt werden. Eine Tabelle, die v zu bestimmten Zeiten t angibt, erleichtert die Erzeugung des korrespondierenden Graphen (v vs. t). Mit Hilfe des Graphen kann die Herleitung der Gleichung $v = g \cdot t$ angeleitet werden. Jede dieser Repräsentationsformen bedeutet eine Mathematisierung, wobei eventuell nicht jede Darstellung nötig ist — der Graph könnte auch ohne die Hilfe der Tabelle gezeichnet werden. Mit der Gleichung und dem zugehörigen Graphen ist wieder ein höheres Niveau der Mathematisierung erreicht, das die Grundlage für eine entscheidende Schlussfolgerung auf dem Weg zum Ziel ist: die Fläche unter dem Graphen muss als zurückgelegte Strecke $s(t)$ des Körpers interpretiert werden.

Der Graph der gleichförmigen Bewegung liefert eine Möglichkeit, diese Schlussfolgerung zu ziehen. Die Fläche ist ein Rechteck und berechnet sich daher durch das Produkt beider Seiten, welche in dem Graphen durch v und t bestimmt werden. Da Geschwindigkeit mal Zeit der zurückgelegten Strecke $s(t)$ im Fall gleichförmiger Bewegung entspricht, kann die Fläche des Rechtecks als zurückgelegte Strecke des Körpers interpretiert werden. Dieser vierte Schritt stellt daher eine *Interpretation* dar, da ein mathematisches Element — die Fläche des Rechtecks — mit physikalischer Bedeutung — die zurückgelegte Strecke — in Beziehung gesetzt wurde.

Der allgemeine Zusammenhang, dass die Fläche unter dem Graphen (v vs. t) dem zurückgelegten Weg $s(t)$ eines Körpers entspricht — auch in dem Fall einer veränderlichen Geschwindigkeit — liegt in der Beziehung begründet, dass die Geschwindigkeit die zeitliche Ableitung des Ortes ist. Dieses Wissen steht den Schülern vielleicht noch nicht zur Verfügung, weshalb die Übertragung auf den Fall der gleichmäßig beschleunigten Bewegung aufgrund von Plausibilität und Analogie vorgenommen wird. Trotzdem repräsentiert dieser Schritt eine Mathematisierung, der zum bisher höchsten Mathematisierungsgrad im physikalisch-mathematischen Modell führt. Mit der Fläche unter dem Graphen (v vs. t) als Ausdruck für die zurückgelegte Strecke $s(t)$ steht eine allgemeingültige Repräsentation bereit, die den letzten Schritt zur Lösung erlaubt.

Mit Hilfe dieses Zusammhangs, der Gleichung $v = g \cdot t$ und dem zugehörigen Graphen kann die gesuchte Gleichung hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2} \cdot v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot (g \cdot t) \cdot t \\ \Rightarrow s(t) &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned}$$

Im Vergleich zum didaktischen Ansatz ist der abstrakte Ansatz direkter und schneller. Die Position des Körpers ist gesucht und die Beschleunigung bekannt. Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung des Ortes in Bezug zur Zeit ($a(t) = d^2s/dt^2$). Da sie konstant ist ($a(t) = g$), muss eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung gelöst werden, um die Lösung $s = s(t)$ zu erhalten. Es ergeben sich zwei Integrationskonstanten, die als Anfangsgeschwindigkeit und Anfangsort interpretiert werden. Als allgemeiner Zusammenhang ergibt sich: $s(t) = s_0 + v_0 t + gt^2/2$. Da Anfangsgeschwindigkeit und Anfangsort Null sind, ist die gesuchte Lösung $s(t) = gt^2/2$.

Der Vergleich beider Ansätze, wie er sich innerhalb des physikalischen Mathematisierungsmodells darstellt, ist in Abbildung 4.5 zu sehen. Der didaktische Ansatz (Abbildung 4.5a) besteht aus fünf Pfeilen, die die schrittweise Mathematisierung anzeigen und einem Pfeil, der zu einem niedrigeren Niveau geht und die Interpretation der Fläche unter dem Graphen repräsentiert. Der gesamte Weg befindet sich innerhalb des physikalisch-mathematischen Modells, da die benutzten mathematischen Elemente immer in enger Verbindung zu ihrer physikalischen Bedeutung benutzt werden. Auch die Manipulation der Symbole, um zur Formel $s(t) = 1/2 \cdot g \cdot t^2$ zu gelangen, ist nicht als technische Fähigkeit durch einen Pfeil zur Mathematik repräsentiert. Das liegt darin begründet, dass einerseits der technische Aspekt der Manipulation sehr kurz und einfach ist, andererseits eine ständige Verbindung zur physikalischen Bedeutung notwendig ist, um die nötigen Schritte der Umformung zu erkennen.

Der abstrakte Ansatz (figure 4.5b) ist schneller und direkter als der didaktische. Der erste lange Pfeil repräsentiert den hohen Grad der Mathematisierung, der in dem Konzept der Beschleunigung als zweiter zeitlicher Ableitung des Ortes enthalten ist. Von da ausgehend muss die Differentialgleichung nach mathematischen Regeln gelöst werden, es ist keine Verbindung zum physikalischen Verhalten notwendig. Daher wird dieser technische Aspekt durch den geschwungenen Pfeil zur Mathematik dargestellt. Das Resultat muss anschließend interpretiert werden: Die Integrationskonstanten entsprechen der Anfangsgeschwindigkeit und dem Anfangsort und beide sind Null. Damit ist das Ergebnis $s(t) = gt^2/2$ erreicht.

Die Darstellung beider Ansätze mit Hilfe des physikalischen Mathematisierungsmodells offenbart die unterschiedliche Art und Weise des Gebrauchs der Mathematik und zeigt Konsequenzen für das Lehren und Lernen auf. Der abstrakte Ansatz benutzt direkt die Beziehung zwischen Beschleunigung und Position und erreicht ein Mathematisierungsniveau, das für Schüler mit unzureichendem mathematischen Wissen schwierig zu verstehen sein kann. Dieses hohe Niveau stellt natürlich eine generelle Beziehung dar und erlaubt es, auch andere Probleme auf diese Weise anzugehen. Auf der anderen Seite verliert es an Verbindung zum spezifischen physikalischen Kontext und ist abstrakter. Demgegenüber steht der didaktische Ansatz, der zwar fallspezifisch, aber dafür konkreter und näher an der physikalischen Bedeutung ist. Er besteht aus einer schrittweisen, eng am physikalischen Verhalten orientierten Mathematisierung mit einem Zwischenschritt zur Interpretation.

Ein weiterer Unterschied ist das Auftreten technischer Fähigkeiten, die in dem abstrakten Ansatz benötigt werden, um die Differentialgleichung zu lösen. Im didaktischen Ansatz dagegen ist immer die Verbindung zwischen mathematischer Struktur und physikalischem Verhalten im Fokus. Obwohl der abstrakte Ansatz effizienter und genereller ist, kann das Herleiten der Formel zu einem technischen Vorgehen verkommen, wenn das Konzept der Beschleunigung als zweiter zeitlicher Ableitung des Ortes nicht vollständig verstanden ist.

4.4. Ausblick zur Weiterentwicklung des Modells

Die bisher vorgestellten Möglichkeiten, verschiedene Prozesse mit dem revidierten Modellierungskreislauf zu repräsentieren, liegen in der Unterscheidung zwischen verschiedenen Modellierungsschritten, den verschiedenen Graden der Mathematisierung des physikalisch-mathematischen Modells und in der Unterscheidung zwischen strukturellen und technischen Fähigkeiten. Dadurch wird eine Neuanordnung und Erweiterung der Möglichkeiten des klassischen Modellierungskreislaufs erreicht.

Es lassen sich jedoch noch weitere Optionen denken, die durch eine Erweiterung der Darstellung repräsentiert werden können. So ist bisher in dem physikalischen Mathematisierungsmodell keine Unterscheidung zwischen einer auf relationalem Verständnis basierender und auswendig gelernter Mathematisierung möglich. Das Aufstellen einer Formel wird als Mathematisierung und damit als strukturelle Fähigkeit begriffen. In vielen Aufgaben wird das Anwenden einer Formel verlangt, so dass die Schüler zu Beginn eine Formel aussuchen müssen. Diese Wahl kann einerseits auf einer auf Verständnis basierenden Analyse der physikalischen Situation, andererseits auf der Assoziationen gegebener Größen mit verschiedenen Formeln beruhen (siehe auch die Analyse der Schulbuchaufgaben im folgenden Kapitel 5.2). Während der erste Fall einer verstandenen strukturellen Fähigkeit entspricht, wird im zweiten Fall nicht „wirklich“ mathematisiert, sondern durch Erinnern und Ausprobieren ersetzt. Diese Unterscheidung wird bisher in dem Modell nicht berücksichtigt.

Wenn die Planung von Unterrichtskonzepten oder Lernaufgaben im Vordergrund steht, also ein Soll-Zustand mit dem Modell modelliert wird, ist die Unterscheidung zwischen strukturellen Fähigkeiten, die auf einem Verstehen des Zusammenhangs von Physik und Mathematik beruhen und solchen, die dies nur vortäuschen und durch Erinnern von auswendig Gelerntem umgehen, nicht unbedingt nötig. Hier geht es ja immer um die „echten“ strukturellen Fähigkeiten, da es kein Lernziel sein sollte, dass die Schüler Formeln auswendig lernen und nach einem Schema anwenden. Wenn es allerdings um die Analyse von Bearbeitungsprozessen der Schüler geht — also um Ist-Zustände —, kann eine Differenzierung zwischen „technischer“ und „struktureller“ Mathematisierung durchaus sinnvoll sein.

In dem physikalischen Mathematisierungsmodell wird die Unterscheidung zwischen strukturellen und technischen Fähigkeiten dadurch vorgenommen, dass der Pfeil, der die technischen Fähigkeiten symbolisiert, das physikalisch-mathematische Modell hin zur Mathematik verlässt. Dieses Kriterium bietet sich auch für die Differenzierung zwischen erinnerter Assoziation und auf Verständnis basierender Mathematisierung an. Die als strukturelle Fähigkeit begriffene Mathematisierung läuft innerhalb des physikalisch-mathematischen Modells ab und bringt damit die enge Verbindung von Physik und Mathematik zum Ausdruck. Dagegen sind auswendig gelernte Verbindungen, die ebenfalls zwei verschiedene Mathematisierungsgrade des Modells verbinden, nicht auf der engen Verknüpfung von Physik und Mathematik begründet. Ein Pfeil, der das physikalisch-mathematische Modell verlässt, repräsentiert daher das von der Physik losgelöste Verbinden verschiedener Mathematisierungsniveaus (siehe Abbildung 4.6).

Eine weitere Eigenschaft des physikalisch-mathematischen Modells, die bisher nicht thematisiert wurde, betrifft die Bedeutung der horizontalen Dimension. Während die vertikale Dimension den Grad der Mathematisierung anzeigt, hat die horizontale Ausdehnung keine Bedeutung. Es kann jedoch überlegt werden, ob auch dieser Richtung sinnvoll eine Bedeutung zugewiesen werden kann. Eine Möglichkeit wäre, eine horizon-

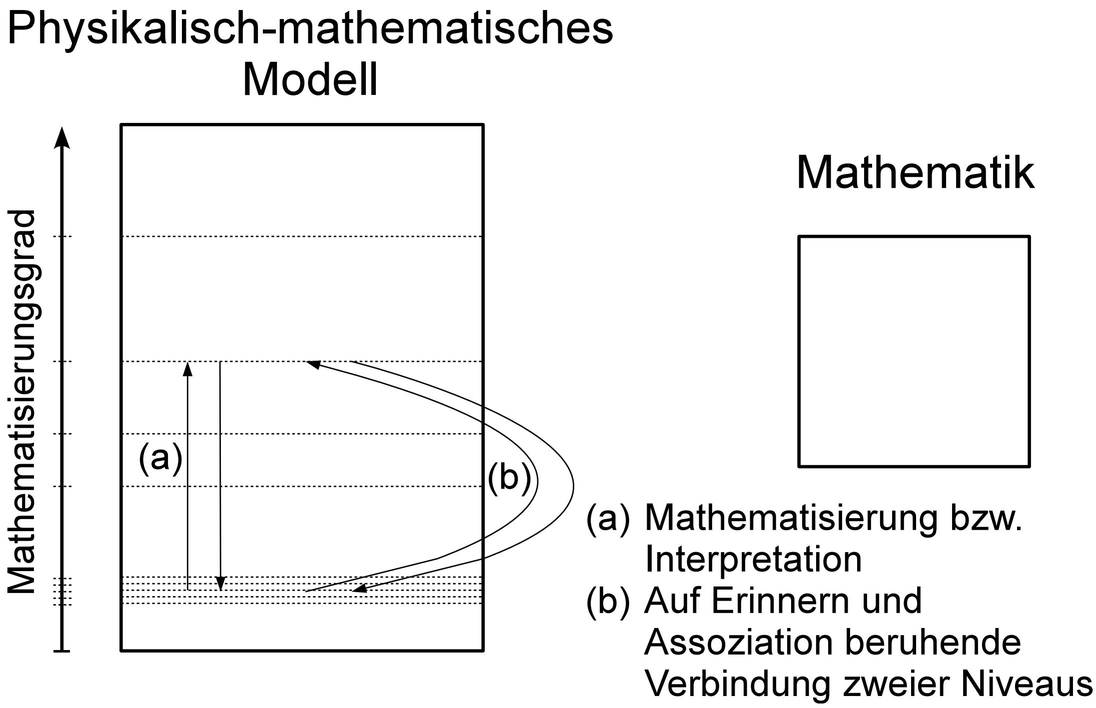


Abbildung 4.6.: Unterscheidung zwischen strukturellen Fähigkeiten und Mathematisierungen, die aufgrund von Erinnern von auswendig Gelerntem zustande kommen.

tale Bewegung innerhalb des physikalisch-mathematischen Modells als physikalische Überlegungen zu interpretieren, die sich auf einem bestimmten Mathematisierungsgrad befinden. So könnte beispielsweise ein rein qualitatives Argumentieren durch einen horizontalen Pfeil auf dem untersten Mathematisierungsniveau dargestellt werden.

Allerdings würde eine Einführung dieser Bedeutung erfordern, dass die Bearbeitungsprozesse der Schüler auch in physikalischer Hinsicht genauer analysiert werden müssten. Zudem müsste eine sehr feine Unterscheidung getroffen werden können, ob zwischen zwei Mathematisierungen noch eine physikalische Argumentation ohne Mathematisierung stattfindet oder nicht. Diese Differenzierung könnte sehr kompliziert werden.

Die hier diskutierten Erweiterungsmöglichkeiten veranschaulichen das Potential des physikalischen Mathematisierungsmodells. Die Unterscheidung zwischen „struktureller" und „technischer" Mathematisierung erweist sich als sinnvolle Ergänzung bei der Analyse von Schulbuchaufgaben (s. Kap. 5.2) und der empirischen Problemanalyse (s. Kap. 8.2). Aufgrund des in dieser Arbeit gelegten Schwerpunktes auf der Übersetzung zwischen Physik und Mathematik wird die Bedeutung der horizontalen Dimension dagegen nicht betrachtet. Dies verbleibt als Ausblick zur Weiterentwicklung des physikalischen Mathematisierungsmodells für Anwendungen mit einem anderen Fokus.

4.5. Zusammenfassung

Mit dem physikalischen Mathematisierungsmodell und dem revidierten Modellierungskreislauf lassen sich die Prozesse physikalisch-mathematischen Denkens beschreiben. Durch die Einführung einer Dimension der Mathematisierung kann die Übersetzung zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischen Strukturen detailliert aufgelöst werden. Dabei ist das rein qualitative physikalische Modell als erstes Niveau eines mathematisierten physikalisch-mathematischen Modells enthalten. Die Trennung zwischen den Bereichen innerhalb und außerhalb des physikalisch-mathematischen Modells ermöglicht zudem die Unterscheidung zwischen strukturellen und technischen Fähigkeiten. Das physikalische Mathematisierungsmodell lässt sich durch eine Verbindung zwischen dem qualitativen Niveau des physikalisch-mathematischen Modells und der „Welt“ zu einem revidierten Modellierungskreislauf ausbauen, dessen Verwendung in der Physikdidaktik analog zum traditionellen Modellierungskreislauf in der Mathematikdidaktik zu begreifen ist.

Die Basis der physikspezifischen Besonderheiten des physikalischen Mathematisierungsmodells liegt in der Reflexion der Rolle der Mathematik in der Physik (Kap. 3). Es zeigt sich eine enge inhaltliche Verflechtung zwischen beiden Wissenschaften, die die Trennung in ein physikalisches und ein mathematisches Modell künstlich erscheinen lässt. Die Auffassung eines physikalisch-mathematischen Modells ist daher mit Blick auf die Natur der Physik passender (Kap. 3.2). Allerdings zeigt sich diese Betrachtungsweise auch unter einer didaktischen Perspektive als sinnvoll. Die Verknüpfung mathematischer und physikalischer Eigenschaften zeigt sich bereits in elementaren Konzepten wie Geschwindigkeit und Beschleunigung. Zudem lässt sich die didaktisch wichtige Differenzierung zwischen technischen und strukturellen Fähigkeiten gut mit einem physikalisch-mathematischen Modell ausdrücken (Kap. 3.3).

Das physikalische Mathematisierungsmodell basiert also auf wissenschaftstheoretischen Argumenten zur Natur der Physik, die in den didaktischen Kontext erweitert wurden. Dabei bezieht sich der zur Natur der Physik betrachtete Aspekt auf die Rolle der Mathematik und damit auf den Bereich physikalischen Denkens, der üblicherweise der theoretischen Physik zugeordnet wird — wie sich auch an der entsprechenden Einordnung der zitierten (theoretischen) Physiker zeigt. Aus diesem Grund lässt sich das physikalische Mathematisierungsmodell auch als Elementarisierung theoretischer Physik begreifen.

Mit dem physikalischen Mathematisierungsmodell und dem revidierten Modellierungskreislauf steht damit ein Modell zum Umgang mit der Mathematik im Physikunterricht bereit, das im Einklang mit der Rolle der Mathematik in der Wissenschaft Physik ist. Es kann als Grundlage für eine konzeptuelle Orientierung zur Rolle der Mathematik im Physikunterricht dienen, die den Fokus auf die strukturellen Fähigkeiten legt. Dass in dieser Hinsicht eine Neuausrichtung erforderlich ist, zeigen die bisherigen Erkenntnisse der Forschung. Sowohl beim Problemlösen als auch beim mathematischen Modellieren zeigen sich bei Schülern und Studenten teilweise tiefe Verständnisschwierigkeiten und ungünstige Strategien. Die technischen Fähigkeiten stehen meist im Vordergrund, ohne einen inhaltlichen Bezug zur physikalischen Situation herzustellen (Kap. 2.3 und 2.4). Auch in den Vorstellungen der Schüler zur Natur der Physik schlägt sich diese Art und Weise des Umgangs mit der Mathematik nieder. Einerseits tritt die theoretische Physik in den Vorstellungen zur Natur der Physik nicht auf, andererseits wird die Mathematik hauptsächlich mit formalen und kalkülorientierten Tätigkeiten in Verbindung gebracht (Kap. 2.6).

Das Vorherrschen technischer Fähigkeiten sowie die Nichtbeachtung der theoretischen Physik in den Vorstellungen zur Natur der Physik, sind wichtige Probleme, denen begegnet werden muss. Mit der Elementarisierung theoretischer Physik und dem Fokus auf strukturellen Fähigkeiten legt das physikalische Mathematisierungsmodell den Schwerpunkt genau auf die relevanten Aspekte. Eine an diesem Modell orientierte Sicht zur Rolle der Mathematik im Physikunterricht kann als Grundlage dafür dienen, die mathematische Struktur der Physik sinnvoll in den Unterricht zu integrieren und den bekannten Problemen zu begegnen.

Um den anvisierten Umgang mit der Mathematik zu präzisieren, zeigt sich die Parallele zum Ansatz der qualitativ-konzeptuellen Physik als hilfreich. Dort wurden mit dem Ziel, das Verstehen physikalischer Konzepte und Zusammenhänge zu unterstützen, viele Unterrichtskonzepte entwickelt, die einen qualitativen Zugang zum Physiklernen propagieren (das Buch „Conceptual Physics“ von Paul Hewitt (Hewitt, 2006) ist ein Standardwerk zu diesem Ansatz). Dabei wird der Fokus auf das Verstehen physikalischen Verhaltens ohne mathematische Rechnungen gelegt. Die Idee ist durchaus sinnvoll, nur stellt sich die Frage, weshalb das Lehren des konzeptuellen Verständnisses nur für die qualitativen physikalischen Zusammenhänge gelten soll. Wieso wird der mathematische Aspekt physikalischen Wissens ausgespart?

Unter dem Blickwinkel des physikalischen Mathematisierungsmodells ergibt sich die Forderung nach einer Erweiterung des qualitativ-konzeptuellen Ansatzes auf die Verbindung zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischen Strukturen. Diese Einbeziehung des Zusammenhangs von Mathematik und Physik ist interessanterweise auch für Paul Hewitt kein Widerspruch. So plädiert er in einem neueren Artikel dafür, Gleichungen zum qualitativen Argumentieren zu nutzen und sie unterstützend für ein physikalisches Verständnis einzusetzen (Hewitt, 2011). Damit wird die Idee, qualitative Zusammenhänge vor einer Quantifizierung zu lernen, auf die Übersetzung zwischen Physik und Mathematik übertragen.

Im Rahmen dieser *konzeptuell-mathematischen Physik* werden mathematische Gleichungen dazu genutzt, physikalisches Verhalten zu interpretieren und physikalische Zusammenhänge darzustellen. Anhand der symbolischen Formen (Kap. 2.5) wird die Vielfalt der Zusammenhänge zwischen mathematischen Strukturen und physikalischem Verhalten deutlich. Diese inhaltlichen Übersetzungen gilt es — ebenso wie physikalische Konzepte — in den qualitativen Physikunterricht aufzunehmen. An der dualen Natur physikalisch-mathematischer Konzepte wie Geschwindigkeit und Beschleunigung zeigt sich ebenfalls, dass ein konzeptuelles Verständnis der Physik auch mathematische Aspekte einschließen muss.

Die konzeptuell-mathematische Physik steht zudem im Einklang mit den Erkenntnissen der Mathematikdidaktik. Dort wird gleichermaßen gefordert, den Fokus auf inhaltliche Bedeutungen mathematischer Operationen zu legen. Das Kalkül soll weniger betont werden, um stattdessen inhaltliche Vorstellungen und Modellierungskompetenzen in den Vordergrund treten zu lassen (siehe Prediger (2009): „Inhaltliches vor Kalkül“). Auch der in Kapitel 2.2 erörterte Verstehensbegriff, der sich auf die Forderung von Skemp (1976) nach einem relationalen Verständnis beim mathematischen Denken bezieht, zeigt in diese Richtung.

Aufgrund der Komplexität der Beziehung zwischen Mathematik und Physik und ihrer engen inhaltlichen Verknüpfung ist es wichtig, gerade hier großen Wert auf ein relationales Verständnis zu legen. Die Benutzung der Mathematik zum Beschreiben physikalischer Phänomene und Gesetze erfordert auf der Lernerseite eine Zuschreibung inhaltlicher Bedeutung zu den mathematischen Strukturen im Sinne der Grundvorstellungen und symbolischen Formen (Kap. 2.5). Die Bandbreite struktureller Fähigkeiten kann nur genutzt und hilfreich zum Physikverstehen eingesetzt werden, wenn sie auf relationalem Verständnis aufbauen. Dieses entwickelt sich wiederum nicht kontextunabhängig oder automatisch und muss deshalb Bestandteil des Physiklernens sein (vgl. Kap. 2.3 und 2.4).

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es um einen neuen Umgang mit der Mathematik beim Lehren und Lernen von Physik geht, der eine Abkehr von dem technischen Gebrauch bedeutet und den damit verbundenen negativen Auswirkungen auf das Physiklernen zu begegnen versucht. Das Neue besteht nicht in der Art und Weise des Umgangs mit der Mathematik an sich, sondern in der konsequenten Übertragung und Anpassung mathematikdidaktischer Erkenntnisse für die Physik. Zusätzlich zeigt die Analyse der Rolle der Mathematik in der Physik, dass diese Forderungen ebenfalls im Einklang mit der Natur der Physik stehen und der theoretischen Physik eine angemessenere Bedeutung beim Physiklernen zuschreiben. Die wissenschaftstheoretische Herleitung gelangt letztendlich zu Schlussfolgerungen, die mit den didaktischen Forderungen nach relationalem Verständnis und inhaltlichen mathematischen Vorstellungen im Einklang stehen. Insofern zeigt sich die konzeptuell-mathematische Physik als ein Ansatz, der sich aus verschiedenen Perspektiven für den Physikunterricht motivieren und fordern lässt. Mit dem physikalischen Mathematisierungsmodell und dem revidierten Modellierungskreislauf steht dabei ein didaktisches Modell zur Verfügung, dass diese Position verkörpert und damit als Grundlage für einen konzeptuell-physikalischen Physikunterricht dienen kann.

5. Aufgabenkultur

In den bisherigen Kapiteln wurde der Forschungsstand und theoretische Rahmen zum Themenfeld „Mathematik im Physikunterricht“ diskutiert. Dabei wurde eine Analyse der Rolle der Mathematik in der Physik vorgenommen und ein didaktisches Modell erarbeitet, das das physikalisch-mathematische Denken modelliert. Die didaktischen Implikationen zum Umgang mit der Mathematik im Physikunterricht führen zu einer konzeptuell-mathematischen Physik. In diesem Kapitel, das den theoretischen Teil dieser Arbeit abschließt, geht es um eine mögliche Implementierung dieses Ansatzes in die Unterrichtspraxis — die Aufgabenkultur. Es wird die Arbeit mit Aufgaben als Mittel konstruktivistischen Unterrichts erläutert, Schulbuchaufgaben analysiert und Verbesserungen diskutiert sowie neue Aufgaben zur konzeptuell-mathematischen Physik erarbeitet. Diese Aufgaben bilden zugleich das Material, auf dem aufbauend die empirische Untersuchung durchgeführt wird.

5.1. Aufgaben als zentrales Element konstruktivistischen Unterrichts

Der gängige fragend-entwickelnde Unterricht steht in vielerlei Hinsicht in der Kritik (s. u.a. BLK, 1997; Duit und Wodzinski, 2006). Probleme dieser Unterrichtsform sind beispielsweise die Vermischung von Lern- und Leistungssituationen und die unzureichende Beachtung individueller Lernwege (BLK, 1997, S. 72). Bereits in Kapitel 2.1 wurde im Rahmen der konstruktivistischen Lerntheorie die Bedeutung des individuell unterschiedlichen Vorwissens für die Konstruktion neuen Wissens hervorgehoben. Durch einen lehrerzentrierten Frontalunterricht ist diesem Umstand jedoch nur schwer Rechnung zu tragen. Der Lehrer kann sich nur an der Vermittlung einer Wissensstruktur orientieren, verschiedene Lernwege werden außer Acht gelassen.

Ebenfalls ein Problem ist die vom Lehrer vorgegebene Zeitstruktur (von Aufschnaiter und von Aufschnaiter, 2001). Schüler, die dem Tempo des Lehrers nicht folgen können, würden aussteigen und demotiviert werden. Jeder Schüler habe sein eigenes Lerntempo und benötige an unterschiedlichen Stellen mehr oder weniger Zeit. Eine feste, vom Lehrer vorgegebene Zeitstruktur sei unflexibel und müsse notwendigerweise damit rechnen, viele Schüler zu verlieren.

Um unter anderem auch diesen Problemen zu begegnen, wird eine Verbesserung der Aufgabenkultur im Physikunterricht gefordert (Häußler und Lind, 1998; Fischer und Draxler, 2001; von Aufschnaiter und von Aufschnaiter, 2001; Leisen, 2006, u.a.). Durch die Arbeit mit geeigneten Aufgaben werde der Möglichkeit individueller Lernwege Rechnung getragen. Beim selbständigen Bearbeiten von Aufgaben erhalten die Schüler die Möglichkeit, sich individuell mit der Problemstellung auseinander zu setzen und originäre Lösungen zu erarbeiten. Auch das Arbeitstempo kann den persönlichen Bedürfnissen angepasst werden. Durch wiederholtes Lesen der Materialien und Aufgabenstellung sowie erneutes Überdenken von Lösungsschritten können die Schüler ihrem eigenen Lerntempo folgen.

Aufgrund dieser Vorzüge des Lernens mit Aufgaben fordern von Aufschnaiter und von Aufschnaiter (2001), dass deutlich mehr als die Hälfte der Unterrichtszeit durch Aufgaben geleitet werden sollte. Auch Fischer und Draxler (2001) sehen die Möglichkeit, dass der Unterricht zu einem wesentlichen Teil an Aufgaben orientiert sein kann. Als weiteren Vorzug sehen sie dabei das Vermitteln naturwissenschaftlicher Arbeitsweisen durch geeignete Aufgaben. Dies ist ein wichtiges Lernziel, dem der fragend-entwickelnde Unterricht nicht nachgekommen sei.

Unter dem Schlagwort der Aufgabenkultur sind mehrere Aspekte zu verstehen. Es geht einerseits um die Aufgaben an sich, also die Art und Qualität der eingesetzten Aufgaben, andererseits um die Vernetzung der Aufgaben untereinander und ihre Einbettung in das Unterrichtsgeschehen, also die Kultivierung der Aufgaben als didaktische Methode (von Aufschnaiter und von Aufschnaiter, 2001; Leisen, 2006). So sind sowohl differenzierte Aufgabenstellungen als auch die Form der unterrichtlichen Bearbeitung wichtige Aspekte einer Verbesserung der Aufgabenkultur.

Bezüglich der Art und Qualität der Aufgaben werden Formate gefordert, die unterschiedliche Vorgehensweisen und mehrere Lösungswege zulassen. Durch geeignete Hilfestellungen — wie beispielsweise Musterlösungen oder gestufte Hilfen — bieten sich Aufgaben auch als Grundlage zum selbständigen Erarbeiten neuen Lernstoffs an. Schüler können auf unterschiedlichen Kompetenzniveaus angesprochen und zu flexiblem und kreativem physikalischen Denken angeregt werden (Leisen, 2001).

Ein sehr wichtiger Baustein in der Aufgabenkultur betrifft die Vernetzung und Einbettung der Aufgaben in den Unterricht. Allein gute Aufgabenstellungen reichen nicht aus, der aufeinander abgestimmte, sukzessive Aufbau von Inhalten, Kompetenzen und Schwierigkeitsniveaus ist ein entscheidender Faktor für erfolgreiches Lernen. Erst in entsprechend angelegten Aufgabenserien können Aufgaben sinnvoll vernetzt werden und somit als Leitfaden für den Unterricht dienen (von Aufschnaiter und von Aufschnaiter, 2001). Bei der Einbettung der Aufgaben in den Unterricht ist darauf zu achten, passende Kontexte zu wählen und die Aufgaben authentisch zu gestalten. Weiterhin ist es sehr wichtig, die Aufgaben den entsprechenden Zielen anzupassen. Aufgaben zum Wiederholen müssen anders gestaltet werden als Prüfungsaufgaben oder Aufgaben zum Erarbeiten eines neuen Themengebietes (Leisen, 2001).

Bei geeigneter Wahl und Konstruktion von Aufgaben und ihrer adäquaten Einbettung in den Unterricht wird dem an Aufgaben ausgerichteten Unterricht hohes Potential eingeräumt. Wenn Aufgaben über das Abfragen deklarativen Wissens hinausgehen, können verschiedene Ziele wie das Verstehen von Konzepten, das Anwenden naturwissenschaftlicher Forschungsmethoden oder das Erlernen von Experimentier- und Problemlösefähigkeiten erreicht werden (Fischer und Draxler, 2001). Aufgaben sollten nicht nur in Vertiefungsphasen, sondern auch beim Erarbeiten, Üben und Wiederholen eingesetzt werden (Leisen, 2001). Die Arbeit mit Aufgaben wird so zu einem zentralen Leitfaden beim Konzipieren und Strukturieren des Unterrichts und erscheint als ein wesentliches Element, um konstruktivistisches Lehren und Lernen im Physikunterricht zu ermöglichen.

5.2. Analyse von Schulbuchaufgaben

Da die Art und Qualität der Aufgaben ein grundlegendes Element einer guten Aufgabenkultur ist, stehen und fallen die Einsatzmöglichkeiten und didaktischen Perspektiven mit der Aufgabenstellung. Eine für Lehrer leicht zugängliche Aufgabensammlung findet sich in den Schulbüchern. Daher bietet es sich an, gerade die Schulbuchaufgaben einer kritischen Analyse zu unterziehen. Dabei steht hier die Rolle der Mathematik und ihre Verbindung zur Physik im Interesse, so dass sich die Frage aufdrängt, wie sich einige typische Schulbuchaufgaben unter dieser Perspektive darstellen und ob sie für einen konzeptuell-mathematischen Physikunterricht geeignet sind.

Um die Tiefe eines Brunnens zu ermitteln, wird ein Stein vom Brunnenrand aus fallen gelassen. Nach drei Sekunden hört man, wie der Stein aufschlägt. Wie tief ist der Brunnen?

Abbildung 5.1.: Aufgabe zum freien Fall aus dem Schulbuch von Duden-Paetec (Duden-Paetec, 2006, S. 100, Aufgabe 26).

Eine 10 m breite Fahrbahn mit Mittelstreifen soll in normalem Schritttempo (4 km/h) von links nach rechts überquert werden. Als Höchstgeschwindigkeit für Fahrzeuge sind 80 km/h erlaubt.

a) Wie weit müssen die ankommenden Fahrzeuge auf der linken Seite (vordere Fahrspur) und wie weit die auf der rechten Seite (Fahrspur jenseits des Mittelstreifens) mindestens entfernt sein, damit ein gefahrloses Überqueren der Fahrbahn für einen Fußgänger möglich ist?

b) Berechne den Fall auch für einen älteren Menschen, der nur mit 2,5 km/h gehen kann.

Abbildung 5.2.: Aufgabe zum Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung aus dem Schulbuch von Schroedel (Schroedel, 2006, S. 110, Aufgabe 2).

Zwei der häufig genutzten Schulbücher an sächsischen Gymnasien sind die Physikbücher der Reihe „Spektrum Physik“ vom Schroedel-Verlag und „Level Physik“ von Duden-Paetec. Da das Themengebiet mit dem höchsten mathematischen Anteil in der Schule die Mechanik ist und die anvisierte Zielgruppe in der empirischen Untersuchung die Klassenstufen neun und zehn sind, wird je eine Kinematik-Aufgabe aus den Büchern für die neunte Klassenstufe (Schroedel, 2006; Duden-Paetec, 2006) analysiert. Diese Aufgaben sind exemplarisch in dem Sinne, dass sich die herausgearbeiteten Charakteristika in vielen anderen mathematisch-physikalischen Aufgaben der jeweiligen Bücher wiederfinden.

Die beiden zu analysierenden Aufgaben betreffen eine Rechenaufgabe zum freien Fall (Abb. 5.1) und eine zur gleichförmigen Bewegung (Abb. 5.2). In der Aufgabe zum freien Fall wird zuerst das Ziel angegeben — die Tiefe des Brunnens soll ermittelt werden — und anschließend kurz die physikalische Situation beschrieben — ein Stein wird fallen gelassen. Danach wird der Messvorgang dadurch angedeutet, dass der ermittelte Messwert angegeben und zur physikalischen Situation in Beziehung gesetzt wird — nach drei Sekunden schlägt der Stein auf. Die Fragestellung wiederholt noch einmal das zu Anfang angegebene Ziel — die Tiefe des Brunnens bestimmen.

Die Aufgabe zur gleichförmigen Bewegung beginnt mit einer Beschreibung der physikalischen Bedingungen, in der die benötigten Werte der physikalischen Größen sofort beim Auftreten der entsprechenden Größe angegeben werden — eine 10 m breite Fahrbahn, Schritttempo (4 km/h) und Höchstgeschwindigkeit 80 km/h. Zu dieser Beschreibung gibt es zwei Unterfragen. Die erste fragt nach den Entfernungen der Autos von links und rechts, die zweite erfordert die erneute Berechnung für ein anderes Schritttempo — oberflächlich mit dem Kontext eines älteren Menschen verbunden —, wobei auch hier sofort der Wert gegeben wird.

Beim Vergleich beider Aufgaben zeigen sich einige kleine Unterschiede. So bezieht sich die Aufgabe zum freien Fall direkt auf einen Messvorgang und beginnt die Aufgabenstellung mit einer kurzen Motivation, indem der Sinn der Messung angegeben wird. Der gegebene Messwert wird ausgeschrieben in die Beschreibung des Vorgangs eingebaut. Die Aufgabe zur gleichförmigen Bewegung beginnt dagegen mit der Beschreibung einer physikalischen Situation, in der die benötigten Größen direkt als Zahlenwerte angegeben sind. Erst in der Fragestellung wird das Ziel der Rechnung ersichtlich. Zudem folgt eine ähnliche Frage mit verändertem Zahlenwert.

Die Unterschiede zwischen beiden Aufgaben liegen hauptsächlich in der Art und Weise der Motivation und der Beschreibung der Aufgabenstellung. In dem einen Fall bezieht sich die Situation auf einen Messvorgang, im anderen Fall auf eine Situationsbeschreibung. Einmal sind die Zahlenwerte ausgeschrieben, einmal explizit als Zahlen angegeben. Diese kleinen Differenzen können vielleicht kleine Effekte auf die Motivation und das Interesse der Schüler haben, ein großer Unterschied, insbesondere im Hinblick auf Lerneffekte, sollte jedoch nicht zu erwarten sein.

Interessanter sind die Gemeinsamkeiten beider Aufgaben, die charakteristisch für nahezu alle mathematisch-physikalischen Aufgaben in den beiden betreffenden Schulbüchern sind. Das übliche Schema, nach dem diese Rechenaufgaben bearbeitet werden sollen, lässt sich als „gegeben-gesucht“ bezeichnen. In der Aufgabenstellung sind, mehr oder weniger explizit, die Zahlenwerte einiger physikalischer Größen angegeben. Zudem ist die gesuchte physikalische Größe benannt, so dass die Schüler nach dem Schema vorgehen können, die gegebenen und gesuchten Größen aus dem Aufgabentext herauszuschreiben[1]. Als nächster Schritt müssen eine oder mehrere Formeln gefunden werden, die im Einklang mit der physikalischen Situation die Berechnung der gesuchten Größe erlauben. Die Ergebnisse mehrerer Studien zeigen jedoch deutlich, dass häufige Schülerstrategien dem Muster des „Plug and Chug“ folgen (vgl. Kap. 2.3). Die Schüler

1 Es steht zu befürchten, dass dieser Schritt auch von Lehrern als erster Schritt vorgeschlagen wird, da es sich für diese Art von Rechenaufgaben durchaus um eine effektive Strategie handelt.

konzentrieren sich nur auf das Finden einer Formel unter Vernachlässigung der physikalischen Situation. Dieses Vorgehen sollte nicht verwundern, da die Schüler bereits durch das Herausschreiben der gegebenen und gesuchten Größen ihre Aufmerksamkeit auf die Zahlen und damit auf Formeln lenken. Zudem erwecken die Aufgabenstellungen oftmals den Eindruck, die physikalische Situation sei nur die Rahmenhandlung einer Rechnung.

Es zeigt sich insgesamt ein Fokus auf den Rechenaspekt der Mathematik und die Quantifizierung physikalischer Größen. Formeln werden als Methode zur Berechnung von Zahlenwerten dargestellt. Wichtiges Kriterium für erfolgreiches Lernen scheint das Auswählen der richtigen Formel und das korrekte mathematische Kalkül zu sein. Die Repräsentation der für die Bearbeitung der Aufgaben nötigen Schritte in dem physikalischen Mathematisierungsmodell zeigt (siehe Abbildung 5.3), dass die Aufgabe bereits auf einem mathematisierten Niveau beginnt und nur eine Mathematisierung erfordert, bevor technische Fähigkeiten nötig werden. Eine Interpretation ist nicht erforderlich und die Mathematisierung besteht nur in dem Auffinden der Formel, ein Vorgang, der auch durch auswendig gelerntes Wissen zu bewältigen ist.

Die Repräsentation in dem Modell zeigt deutlich, wie klein der Bereich der angesprochenen Fähigkeiten ist und welches Gewicht das Kalkül erhält. Die strukturellen Fähigkeiten werden praktisch nicht gefordert, da das Aufstellen der Formel nicht im Rahmen einer physikalisch begründeten Mathematisierung erfolgen muss. Eine erste Mathematisierung, ausgehend vom rein qualitativen Modell, oder gar eine Idealisierung einer realen Situation werden durch die bereits mathematisierte Aufgabenstellung mit gegebenen Zahlenwerten gänzlich außen vor gelassen. Ebenso verhält es sich mit einer Interpretation oder Validierung der Ergebnisse.

Weiterhin lässt sich feststellen, dass die oben genannten Forderungen zur Aufgabenkultur weitestgehend nicht erfüllt werden. Die Aufgabenstellung lässt sich als geschlossen und nicht authentisch einordnen. Die Kontextorientierung wirkt teilweise künstlich und individuelle Lösungswege werden nicht unterstützt. Zudem lässt sich an einer erfolgreich gelösten Aufgabe meistens nicht feststellen, ob der Schüler die notwendigen physikalischen Zusammenhänge wirklich verstanden hat. Der richtige Zahlenwert kann ebenso durch zufälliges oder auswendig gelerntes Auswählen der richtigen Formel erhalten werden.

Auch unter dem Blickwinkel des instrumentellen und relationalen Verstehens müssen solche Aufgabenstellungen kritisch betrachtet werden. Gängige Physikrechenaufgaben

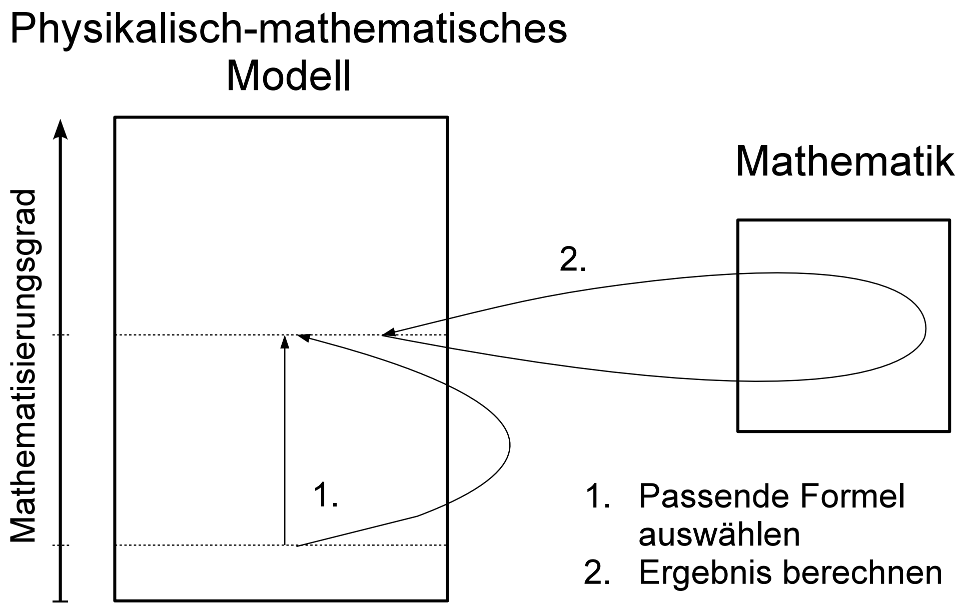


Abbildung 5.3.: Repräsentation der zum Lösen der Schulbuchaufgaben nötigen Schritte innerhalb des physikalischen Mathematisierungsmodells. Die Aufgabenstellung startet bereits auf einem mathematisierten Niveau innerhalb des physikalisch-mathematischen Modells. Als Mathematisierungsschritt ist nur das Auswählen der passenden Formel erforderlich, wobei hier nicht automatisch eine strukturelle Fähigkeit angesprochen wird, sondern die Wahl der Formel ebenso durch Erinnern und Ausprobieren erfolgen kann. Danach ist sofort die technische Berechnung eines Zahlenwertes erforderlich. Dies stellt den Abschluss der Aufgabe dar, eine Interpretation ist weder nötig noch wird sie durch die Art der Fragestellung stimuliert.

erfordern von den Schülern, dass sie die nötige Formel identifizieren, in die sie die gegebenen Zahlenwerte einsetzen müssen. Dieses Vorgehen erfordert kein relationales Verstehen, ein instrumentelles Verständnis als Wissen von Regeln ist ausreichend. Zudem kann eine falsche Lösung sowohl auf falschen physikalischen Annahmen als auch auf Rechenfehlern beruhen. Dies führt zu einer Überbewertung des Kalküls im Gegensatz zum relationalen Verständnis des Zusammenspiels von physikalischem Verhalten und mathematischen Gleichungen. Zusammenfassend muss konstatiert werden, dass die Rolle der Mathematik hauptsächlich in den technischen Fähigkeiten zum Ausdruck kommt, und daher weder ein relationales Verstehen der Schüler erfordert noch im Einklang mit der Natur der Physik steht.

5.3. Möglichkeiten zur Verbesserung der Schulbuchaufgaben

Die aufgezeigten Kritikpunkte der beiden Beispielaufgaben zeigen dringenden Verbesserungsbedarf, wenn ein konzeptuell-mathematischer Physikunterricht angestrebt werden soll. Im nächsten Abschnitt werden daher gänzlich neue Aufgaben zur konzeptuell-mathematischen Physik entwickelt. Zuvor soll jedoch mit Hilfe des revidierten Modellierungskreislaufs gezeigt werden, wie sich die beiden Schulbuchaufgaben in interessantere Aufgaben umwandeln lassen. Dies stellt eine relativ einfache Möglichkeit für Lehrer dar, mit bereits vorhandenem Material zu arbeiten.

Da es sich bei den Aufgaben um Anwendungsaufgaben handelt, die nicht auf spezielle strukturelle Fähigkeiten abzielen, ist es naheliegend zu fordern, dass ein möglichst großes Spektrum aller Modellierungsprozesse auftreten soll. In der Repräsentation der Schulbuchaufgaben innerhalb des physikalischen Mathematisierungsmodells zeigen sich nur zwei Prozesse, die zum Lösen der Aufgaben nötig sind (Abb. 5.3). Durch das Beschreiben der physikalischen Situation mit gegebenen Zahlenwerten wird der Beginn bereits auf ein mathematisiertes Niveau gelegt. Um diesem Aspekt entgegenzuwirken, kann die Aufgabenstellung so abgewandelt werden, dass eine natürliche Situation ohne Zahlenwerte beschrieben wird. Dadurch beginnt man im Bereich der „Welt“ und muss sowohl eine Idealisierung vornehmen als auch durch das Überlegen sinnvoller Zahlenwerte einen zusätzlichen Mathematisierungsschritt machen.

Zudem besteht eine größere Chance, dass die Schüler durch die verbesserte Kontextverankerung und eigenständige Idealisierung auch den anderen Mathematisierungsschritt — das Aufstellen der Formel — unter Bezugnahme zur physikalischen Situation durchführen. Ebenso kann eine Interpretation und Validierung eher stimuliert werden, wenn die Aufgabenstellung in der „Welt“ startet und auch die Fragestellung nach einer Antwort im Rahmen der „Welt“ verlangt. Allerdings sind diese Vermutungen nicht nachgewiesen und müssten näher untersucht werden. Die Repräsentation solcher abgewandelten Aufgabenstellungen innerhalb des revidierten Modellierungskreislaufs ist in Abbildung 5.4 dargestellt.

Es zeigt sich eine vielfältigere Auswahl an Tätigkeiten, die zur Lösung durchgeführt werden müssen. Die technischen Fähigkeiten nehmen einen geringeren Stellenwert ein und die Bandbreite der strukturellen Fähigkeiten ist größer. Durch die Verankerung in der Realität wird eher ein relationales Verstehen erfordert, da die Aufgabenstellung nicht so

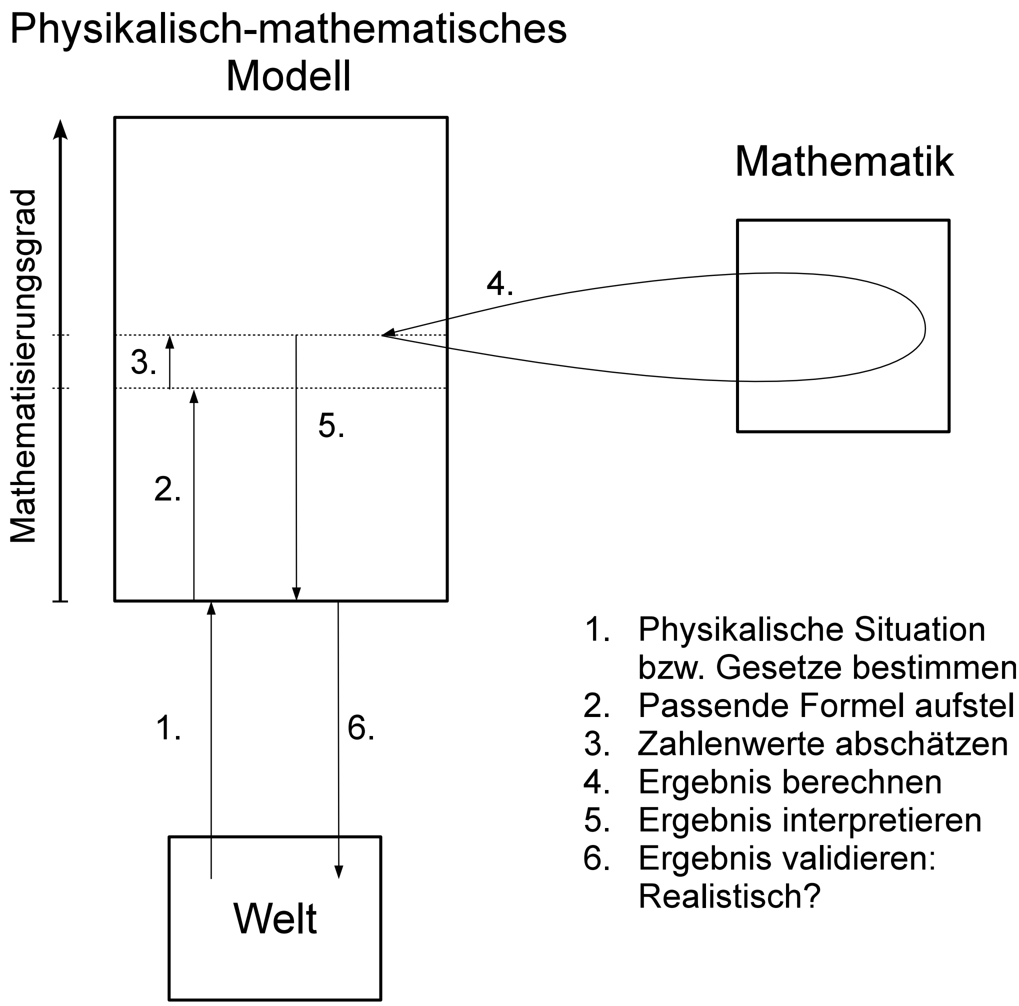


Abbildung 5.4.: Repräsentation der zum Lösen einer verbesserten Aufgabe nötigen Schritte innerhalb des revidierten Modellierungskreislaufs. Die Aufgabenstellung beschreibt eine natürliche Situation, die zuerst vom Schüler idealisiert werden muss. Anschließend sind zwei Mathematisierungsschritte notwendig: das Aufstellen einer passenden Gleichung sowie das Abschätzen der benötigten Zahlenwerte. Dann erfolgt ebenfalls eine Berechnung. Wenn möglich, sollte die Fragestellung so formuliert sein, dass eine Interpretation und Validierung der Ergebnisse zumindest stimuliert wird.

sehr vorstrukturiert ist und die Anwendung auswendig gelernter Schemata erschwert. In diese Richtung wirkt auch der Verzicht auf gegebene Zahlenwerte: Die benötigten physikalischen Größen sind nicht mehr durch die Angabe von Zahlen gekennzeichnet, so dass die Anwendung der Strategie „gegeben-gesucht“ weniger naheliegend ist. Sollte sie dennoch angewandt werden, muss das Herausfinden der gegebenen Größen jedoch auf einem physikalischen Verständnis beruhen und kann nicht oberflächlich aus der Aufgabenstellung herausgelesen werden.

In den Abbildungen 5.5 und 5.6 sind Verbesserungsvorschläge zu den Schulbuchaufgaben zum freien Fall (Abb. 5.1) und zur gleichförmigen Bewegung (Abb. 5.2) angegeben. Die erläuterten Vorschläge zur natürlichen Aufgabenstellung ohne Zahlenwerte wurden umgesetzt, so dass die Bearbeitungsstrategien den im Modell repräsentierten Schritten folgen können (Abb. 5.4). Dabei sind Interpretation und Validierung zwar nicht zwingend erforderlich, sie werden aber durch die Einbettung der Fragestellung in den natürlichen Kontext eher stimuliert. Bei der Aufgabe zur Brunnentiefe können die „realistischen Zahlenwerte“ dazu anregen, auch das Ergebnis im Hinblick darauf zu überprüfen, ob es realistisch ist. Bei der Aufgabe zur Straßenüberquerung sorgen die Formulierungen nach der Mindestentfernung und einem „gefahrlosen Überqueren“ dafür, dass Ungenauigkeiten einbezogen werden, die eigentlich eine Bewertung des Zahlenergebnisses erfordern.

Abschließend ist noch zu erwähnen, dass die abgeänderten Schulbuchaufgaben auch der Forderung nach individuellen Lösungswegen besser nachkommen. Allein das Ab-

Brunnentiefe

Wie kann man mit einem Stein und einer Uhr die Tiefe eines Brunnens ermitteln? Führe auch eine Beispielrechnung mit realistischen Zahlenwerten durch.

Abbildung 5.5.: Aufgabe „Brunnentiefe“ als abgewandelte Version der entsprechenden Aufgabe (Abb. 5.1) aus dem Schulbuch von Duden-Paetec (Duden-Paetec, 2006, S. 100, Aufgabe 26). Die notwendige Messung wird vom Schüler erfragt und es werden keine Zahlenwerte gegeben.

Straßenüberquerung

Ihr wollt eine zweispurige Landstraße (eine Fahrspur in jede Richtung) in normalem Schritttempo überqueren. Wie weit müssen die fahrenden Autos, die von links kommen, und wie weit müssen die fahrenden Autos, die von rechts kommen, mindestens von euch entfernt sein, um ein gefahrloses Überqueren der Straße zu ermöglichen?

Abbildung 5.6.: Aufgabe „Straßenüberquerung“ als abgewandelte Version der entsprechenden Aufgabe (Abb. 5.2) aus dem Schulbuch von Schroedel (Schroedel, 2006, S. 110, Aufgabe 2). Die Aufgabenstellung ist natürlicher formuliert und auf gegebene Zahlenwerte wird verzichtet.

schätzen der Zahlenwerte bezieht die individuellen Erfahrungen der Schüler mit ein, ohne zwischen richtig und falsch zu unterscheiden. Zudem können unterschiedliche Lösungen erarbeitet werden, je nachdem ob beispielsweise der Luftwiderstand beim Brunnen oder ein zusätzlicher Sicherheitsabstand bei der Straßenüberquerung von den Schülern mit einbezogen wird. Der Lösungsweg und das Ergebnis können individuelle Prägungen der Schüler aufweisen, die sich je nach Kompetenzniveau unterscheiden können.

Die vorgestellten Verbesserungen der Schulbuchaufgaben im Hinblick auf eine Weiterentwicklung der Aufgabenkultur sind als einfach durchzuführende Änderungen an bestehendem Aufgabenmaterial aufzufassen. Sie stellen noch keine optimale Verwirklichung der konzeptuell-mathematischen Physik dar. Durch die Repräsentation der Lösungswege innerhalb des physikalischen Mathematisierungsmodells können die Unterschiede zu den ursprünglichen Aufgabenstellungen aufgezeigt werden. Die technischen Fähigkeiten stehen nicht mehr so sehr im Fokus und weitere Forderungen einer verbesserten Aufgabenkultur — wie Kontextorientierung und individuelle Lösungswege — werden besser verwirklicht. Ein expliziter Fokus auf die strukturellen Fähigkeiten und die inhaltliche Übersetzung zwischen physikalischem Verhalten und mathematischen Strukturen ist mit dieser Art von Aufgaben jedoch noch nicht erreicht. Dazu bedarf es neuer Aufgaben, die das qualitative physikalische Verstehen mathematischer Strukturen in das Zentrum der Aufgabenstellung stellen.

5.4. Neue Aufgaben zur konzeptuell-mathematischen Physik

Im Rahmen der Verbesserung der Aufgabenkultur als ein zentrales didaktisches Element bietet sich die Konstruktion neuer Aufgaben an, um das Ziel einer konzeptuell-mathematischen Physik in den Unterricht zu tragen. In diesem Sinne werden Aufgaben konstruiert, die verschiedene Aspekte konzeptuell-mathematischer Physik verwirklichen, so dass nicht mehr das Kalkül, sondern das relationale Verstehen des Zusammenhangs zwischen Physik und Mathematik in das Zentrum rückt. Allerdings ist zu beachten, dass die im Folgenden vorgestellten Aufgaben zuvorderst mit dem Ziel einer empirischen Untersuchung von Verständnisproblemen entwickelt worden sind. In den Aufgaben ist daher das Prinzip der konzeptuell-mathematischen Physik enthalten, eine direkte Verwendung im Unterricht ist jedoch nicht ohne Weiteres möglich. Zum einen ist das Schwierigkeitsniveau eher anspruchsvoll, um die Schüler herauszufordern und Verständnisprobleme identifizieren zu können. Zum anderen ist die Formulierung der Aufgabenstellung nicht auf spezifische Unterrichtssituationen abgestimmt. Daher wären Adaptionen des Schwierigkeitsgrades und der Formulierung hinsichtlich des intendierten Verwendungszwecks nötig. Weiterhin ist zu beachten, dass die Aufgaben unter Beachtung des sächsischen Lehrplans für Schüler der neunten und zehnten Klasse entwickelt wurden. Um zu verhindern, dass die Schüler die Übersetzung zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischer Gleichung durch auswendig gelerntes Wissen umgehen, müssen die verwendeten Formeln über den Lehrplan hinausgehende Elemente enthalten.

5.4.1. Formel aufstellen

Ein zentraler Bereich der strukturellen Fähigkeiten umfasst die Mathematisierung physikalischen Verhaltens. Wie in dem physikalischen Mathematisierungsmodell zum Ausdruck gebracht, gibt es unterschiedliche Grade der Mathematisierung und demzufolge mehrere Schritte auf dem Weg zu einer mathematischen physikalischen Beschreibung. Das Beispiel zur Herleitung der Gleichung für den zurückgelegten Weg beim freien Fall in Kapitel 4.3 hat diese schrittweise Mathematisierung ebenfalls verdeutlicht. Ein mögliches Ziel konzeptuell-physikalischer Aufgaben sollte daher sein, diese verschiedenen Mathematisierungsschritte in den Fokus zu rücken. Die Aufgabe zum Luftwiderstand (siehe Abbildung 5.7) ist unter diesem Blickpunkt entwickelt worden.

Die Aufgabenstellung beschreibt den allgemeinen Fall eines fallenden Körpers und thematisiert den Einfluss des Luftwiderstandes. Ziel der Aufgabe ist, die Gleichung für den Einfluss des Luftwiderstandes aufzustellen. Um die Aufgabe im Schwierigkeitsgrad anzupassen, sind einige Hilfen bereits gegeben. Es wird erwähnt, dass dem Einfluss des Luftwiderstandes durch eine negative Beschleunigung Rechnung getragen wird. Zudem werden alle physikalischen Größen und die zugehörigen Formelzeichen, von denen der Luftwiderstand abhängt, gegeben. Diese Abhängigkeiten werden noch weiter konkretisiert: es wird das Wissen bereit gestellt, dass die angegebenen physikalischen Größen alle direkt oder indirekt proportional zum Luftwiderstand sind. Um diese Aussage auch für die Geschwindigkeit zu ermöglichen, wird deren Einfluss gleich mit v^2 angegeben.

Die Schüler kennen also die relevanten physikalischen Größen, von denen die negative Beschleunigung aufgrund des Luftwiderstandes abhängt, und müssen nur entscheiden,

Luftwiderstand

Lässt man auf der Erde einen Körper fallen, muss man noch den Einfluss des Luftwiderstandes berücksichtigen. Dieser hat eine bremsende Wirkung, was man durch eine (negative) Beschleunigung a_{Luft} beschreibt. Ihr sollt die Gleichung für a_{Luft} aufstellen, wobei ihr auf folgendes Wissen zurückgreifen könnt: a_{Luft} ist proportional oder indirekt proportional zu...

- ρ („Rho"): Dichte der Luft
- A: Querschnittsfläche des Körpers in Bewegungsrichtung
- m: Masse des Körpers
- v^2: Quadrat der Geschwindigkeit des Körpers

Wie muss demnach die Gleichung für a_{Luft} aussehen?

Abbildung 5.7.: Aufgabe „Luftwiderstand" zum Aufstellen einer Formel aufgrund physikalischer Überlegungen.

ob eine direkte oder indirekte Proportionalität vorliegt. Diese Überlegungen müssen sie aufgrund einer Analyse des physikalischen Verhaltens machen. Wenn dies für alle vier Größen geschehen ist, müssen diese Größen entsprechend der Art der Abhängigkeit in eine Gleichung gebracht werden. Dabei ist noch die zusätzliche Schwierigkeit einer Proportionalitätskonstante zu beachten, wobei ein diesbezüglicher Fehler keine physikalischen Auswirkungen auf die Lösung hat.

Ein zusätzlich möglicher Schritt stellt die Überprüfung der Einheiten dar. Dies kann mit dem Ziel erfolgen, die aufgestellte Formel auf ihre Richtigkeit hin zu überprüfen. Eine weitere Möglichkeit stellt das Feststellen der Abhängigkeit einer physikalischen Größe dar, deren Rolle nicht mit Sicherheit aufgrund physikalischer Überlegungen bestimmt werden kann. Diese zweite Möglichkeit der Einheitenüberprüfung kann jedoch schnell zu einem sinnlosen Ausprobieren verkommen, so dass aus diesem Grund die Einheiten in der Aufgabenstellung nicht erwähnt werden.

In Abbildung 5.8 ist das intendierte Vorgehen bei dieser Aufgabe dargestellt. Es gibt vier Mathematisierungsabfolgen aus je einer Idealisierung und drei Mathematisierungen. Diese Abfolgen stehen jeweils für die Überlegungen zu einer physikalischen Größe. Zuerst muss ein qualitativer Zusammenhang der entsprechenden physikalischen Größe mit dem Luftwiderstand aufgestellt werden, z.B. die Dichte der Luft als Maß für die Anzahl der Luftmoleküle und deren Kollisionen mit dem Körper als Maß für den Luft-

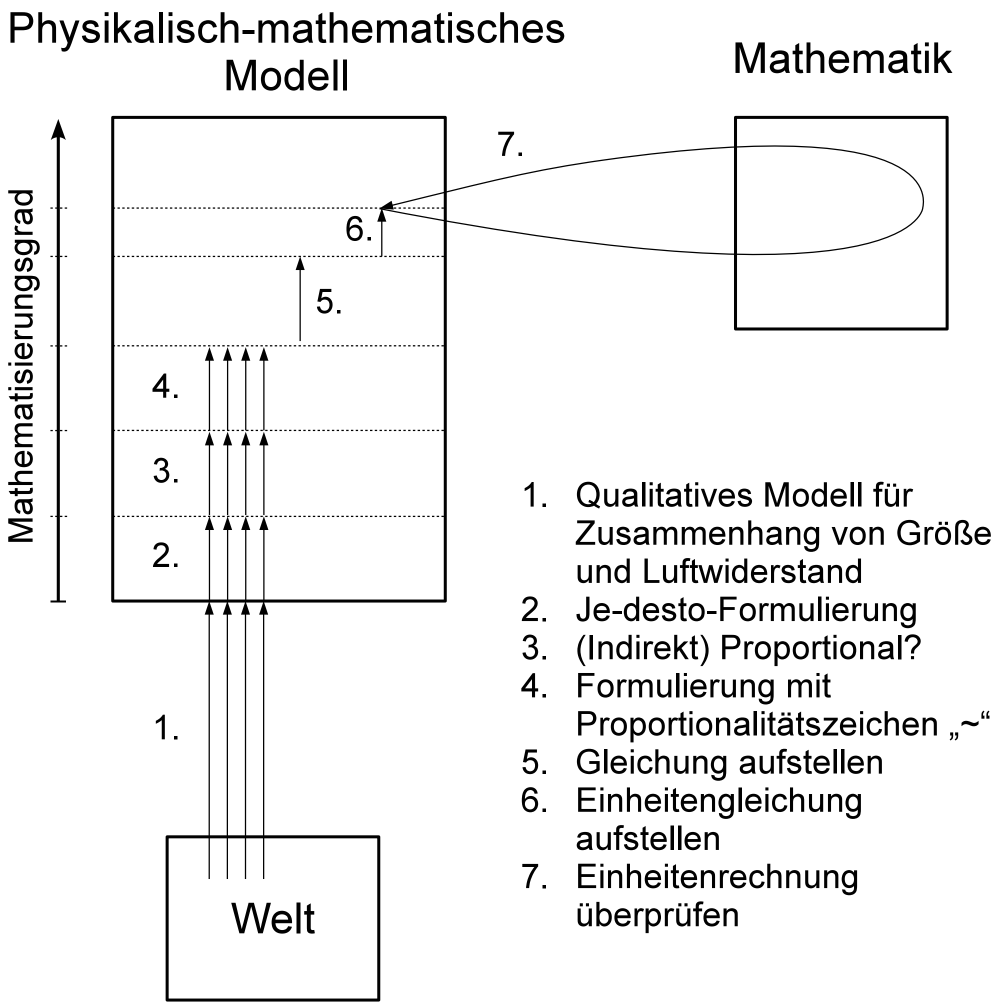


Abbildung 5.8.: Repräsentation des intendierten Vorgehens bei der Bearbeitung der Aufgabe „Luftwiderstand“. Der Pfeil, der die technische Operation anzeigt, steht für die Einheitenrechnung. Da das Überprüfen der Einheiten hauptsächlich auf der Beachtung mathematischer Regeln beruht, stellt es eine im Wesentlichen technische Fähigkeit dar. Trotzdem enthält sie auch strukturelle Elemente, wie die Beachtung des Zusammenhangs von physikalischer Größe und entsprechender Einheit, und ist daher nicht so kritisch zu sehen wie das bloße Ausrechnen von Zahlenwerten.

widerstand. Anschließend können bis zu drei Mathematisierungsschritte durchlaufen werden: Von einer je-desto-Formulierung des Zusammenhangs, über die Entscheidung ob proportional oder indirekt proportional, bis zum Aufschreiben der Abhängigkeit mit Hilfe des Proportionalitätszeichens. Ob der dritte Schritt vollzogen wird, hängt allerdings davon ab, wie das Zwischenergebnis notiert wird. Es ist durchaus ausreichend, die (indirekte) Proportionalität als Wort aufzuschreiben.

Wenn alle vier physikalischen Größen in einen Zusammenhang zum Luftwiderstand gebracht wurden, erfolgt als letzter Schritt das Aufschreiben der Gleichung, was ebenfalls eine weitere Mathematisierung darstellt. Die erhaltene Gleichung kann letztendlich anhand der Einheiten überprüft werden. Dazu wird zuerst ein Zuweisen der Einheiten zu den physikalischen Größen benötigt, was als kleine Mathematisierung aufzufassen ist. Anschließend folgt das Beachten mathematischer Regeln, um die Passung der Einheiten in der Gleichung zu überprüfen. Dies stellt eher eine technische Fähigkeit dar, weshalb die Repräsentation in dem Modell durch den entsprechenden Pfeil gekennzeichnet ist.

5.4.2. Grenzfälle diskutieren

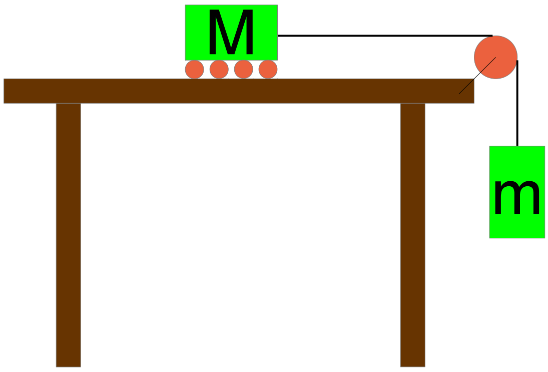
Da in der Aufgabe zum Luftwiderstand das Aufstellen einer Gleichung und damit das Mathematisieren im Zentrum steht, ist es wichtig, ebenso die mit dem Interpretieren verbundenen strukturellen Fähigkeiten anzugehen. Hierfür bietet sich das Interpretieren und Diskutieren von Grenz- oder Spezialfällen an. Die allgemeine Idee ist, eine physikalische Situation für den Fall zu betrachten, dass eine involvierte physikalische Größe auf Null oder „Unendlich“ gesetzt wird. Die Gleichung vereinfacht sich in solchen Grenzfällen oftmals, so dass ein einfacher Abgleich mit dem physikalischen Verhalten möglich wird und ein erster Eindruck gewonnen werden kann, ob die Gleichung das physikalische Verhalten angemessen beschreibt. Diese Idee ist in der Aufgabe „Zwei Massen“ realisiert (siehe Abbildung 5.9).

Die Aufgabe ist Redish (2006) entlehnt, allerdings an das Schulniveau angepasst. Aus diesem Grund wurde die Gleichung für die Beschleunigung des Systems in der Aufgabenstellung angegeben. Die Aufgabenstellung fragt jeweils nach der Beschleunigung für den Fall, dass eine der beiden Massen vernachlässigt wird. Zudem wird gefragt, ob die Ergebnisse physikalisch sinnvoll sind, um die Aufmerksamkeit auf den Abgleich mit dem physikalischen Verhalten zu lenken.

Bei dieser Aufgabe müssen die Schüler sowohl eine physikalische als auch eine mathematische Analyse der Situation vornehmen und beide Ergebnisse miteinander abgleichen. Dabei ist es unerheblich, ob die Schüler mit der physikalischen oder der mathematischen Untersuchung beginnen. Bei der Betrachtung der Gleichung müssen die Schüler zuerst eine kleine Mathematisierung vornehmen, da das Vernachlässigen der Masse als Nullsetzen mathematisiert werden muss. Damit kann das mathematische Ergebnis be-

Zwei Massen

Zwei Körper der Massen M bzw. m sind wie auf der Abbildung miteinander verbunden:



Der Körper der Masse M ist auf Rädern gelagert und mit einem Seil über eine Umlenkrolle mit dem Körper der Masse m verbunden, welcher frei in der Luft hängt. Die Räder und die Umlenkrolle sind so gut gelagert, dass die Reibung vernachlässigt werden kann. So lange der Körper M festgehalten wird, bewegen sich die Körper nicht. Wenn aber M losgelassen wird, beschleunigen beide Körper mit der Beschleunigung $a = \frac{m}{M+m} \cdot g$, wobei g die Fallbeschleunigung ist.

a) Betrachtet anhand der Formel, wie groß die Beschleunigung beider Körper ist, wenn die Masse M des rollenden Körpers vernachlässigbar klein ist.

b) Betrachtet anhand der Formel, wie groß die Beschleunigung beider Körper ist, wenn die Masse m des hängenden Körpers vernachlässigbar klein ist.

Sind eure Ergebnisse physikalisch sinnvoll?

Abbildung 5.9.: Aufgabe „Zwei Massen“ zum Interpretieren der Grenzfälle der halben Atwood’schen Fallmaschine.

rechnet werden, das sich im ersten Fall zu $a = g$ und im zweiten Fall zu $a = 0$ ergibt. Anschließend folgt eine Interpretation des Ergebnisses als freier Fall bzw. keine Bewegung. Die entsprechende Repräsentation in dem revidierten Modellierungskreislauf ist in Abbildung 5.10 gezeigt.

Die physikalische Betrachtung kommt zu den gleichen Ergebnissen. Ein Weglassen der rollenden Masse führt dazu, dass der hängende Körper nicht gebremst wird und daher im freien Fall fällt. Ein Weglassen der hängenden Masse führt dazu, dass keine Masse an dem Seil ziehen kann und sich der rollende Körper demzufolge nicht bewegt. Im Rah-

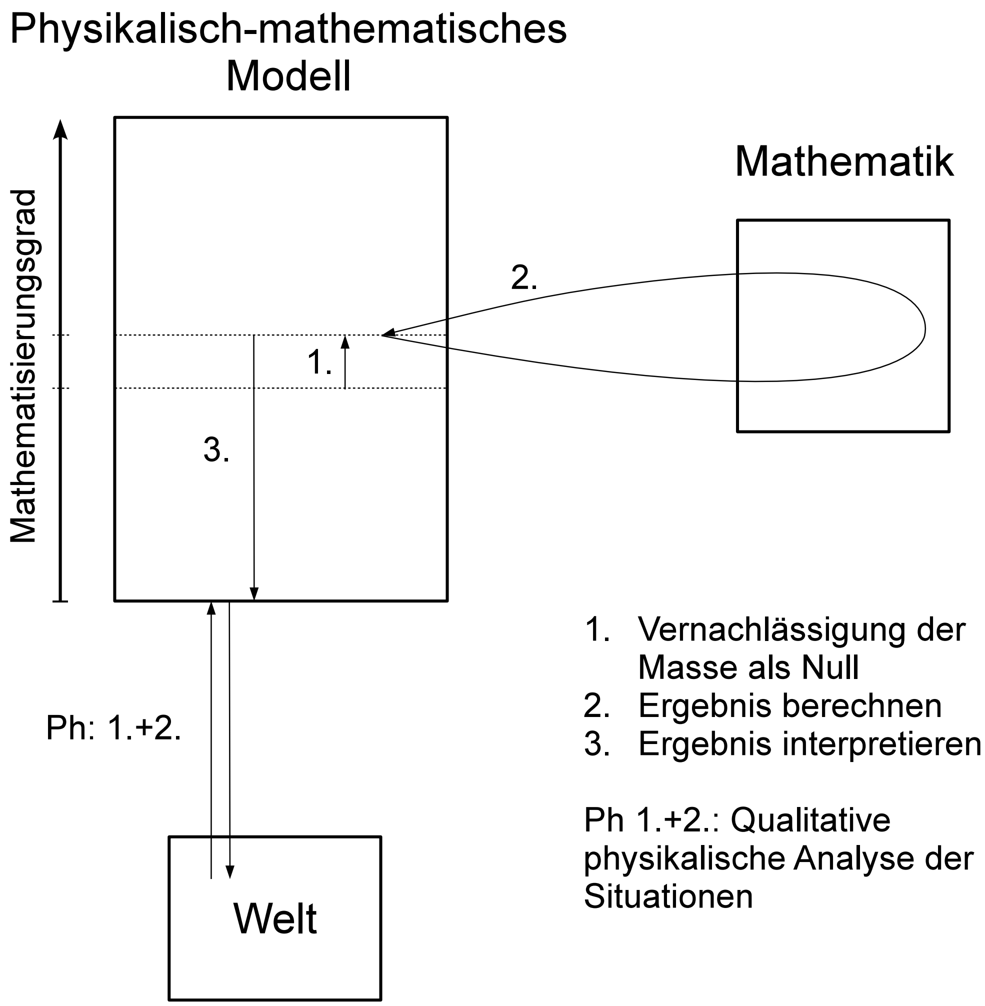


Abbildung 5.10.: Repräsentation des intendierten Vorgehens bei der Bearbeitung der Aufgabe „Zwei Massen“. Mathematische und physikalische Betrachtung können in beliebiger Reihenfolge erfolgen. Die physikalische Analyse besteht aus einem Abgleich zwischen qualitativem Modell und realem Verhalten, weshalb es durch die Prozesse des Validierens und Idealisierens repräsentiert wird. Die mathematische Analyse benötigt zu Beginn eine Mathematisierung der Vernachlässigung der Massen. Damit ist eine mathematische Untersuchung der Gleichung möglich, die aus technischen Fähigkeiten besteht. Anschließend folgt die Interpretation des Ergebnisses.

men des Modells ist die physikalische Analyse als ein Übersetzen zwischen qualitativem Modell und realer Welt zu begreifen, weshalb es durch die Pfeile der Idealisierung und Validierung repräsentiert wird.

Letztendlich müssen beide Argumentationen aufeinander bezogen werden. Durch die Erkenntnis, dass sowohl die mathematische Analyse der Gleichung der Beschleunigung als auch eine physikalische Betrachtung der Situation zu gleichen Ergebnissen führen, kann die Einsicht in den beschreibenden Charakter physikalischer Gleichungen unterstützt werden. Der Zusammenhang zwischen Verhalten und mathematischer Repräsentation wird deutlich und die Möglichkeit, durch Untersuchung mathematischer Strukturen Rückschlüsse zum physikalischen Verhalten ziehen zu können, erfahrbar gemacht.

5.4.3. Physikalische Schlussfolgerungen aus Formel ziehen

Ein wichtiger Aspekt der strukturellen Fähigkeiten des Interpretierens bezieht sich auf das Ziehen von physikalischen Schlussfolgerungen aus mathematischen Strukturen. In der vorherigen Aufgabe „Zwei Massen“ wurde die Interpretation physikalischen Verhaltens mathematischer Ergebnisse bereits thematisiert, allerdings handelt es sich dabei um das Verbinden eines klaren Ergebnisses mit dem zugehörigen physikalischen Verhalten. Zudem wurde auf den Abgleich zwischen einerseits der mathematischen und andererseits der physikalischen Analyse wert gelegt. Die Möglichkeit, physikalische Schlussfolgerungen aus einer Gleichung zu ziehen, geht jedoch weiter. So kann nicht nur das Ergebnis nach einer Rechnung interpretiert werden, sondern bereits die Struktur einer Gleichung in physikalische Bedeutungen übersetzt werden. Beispielsweise kann aus der Gleichung zum zurückgelegten Weg beim freien Fall direkt die Auswirkung auf die Geschwindigkeit herausgelesen werden, wenn das Konzept der Geschwindigkeit als zeitlicher Änderungsrate des Ortes verstanden wurde.

Um die Schüler zum direkten Interpretieren von Gleichungsstrukturen anzuregen, ist es wichtig, sie daran zu hindern, auf bereits gelernte physikalische Gesetze zurückzugreifen und damit die Interpretation der Gleichung zu umgehen. Es kann einerseits direkt aus der Gleichung zum freien Fall geschlossen werden, dass man mehr Weg zurück legt, wenn man länger fällt, andererseits ist dies auch allgemeines Wissen aus der Alltagserfahrung oder aus dem Physikunterricht. Um diese Möglichkeit für die Schüler auszuschließen, bietet es sich an, eine hypothetische Formel einzuführen, die interpretiert werden soll. Trotzdem ist es wichtig, weiterhin im physikalischen Kontext zu bleiben, damit das Interpretieren nicht zu einer rein mathematischen Interpretation gerät. In diesem Sinne führt die folgende Herleitung zu der Aufgabe „Phantasie-Universum“:

Sei eine Größe Γ gegeben als

$$\Gamma := \frac{r_{Erde}^2}{GM_{Erde}},$$

wobei r_{Erde} der Erdradius, M_{Erde} die Masse der Erde und G die bekannte Gravitationskonstante ist. Diese Definition würde zu einem Wert von $\Gamma \approx 0.1\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}}$ führen. Aus den Einheiten lässt sich ersehen, dass Γ die Bedeutung einer inversen Beschleunigung hat (was immer das bedeuten mag). Mit der Definition von Γ lässt sich die Gravitationskraft, die auf einen Massenpunkt m auf der Oberfläche der Erde wirkt, folgendermaßen schreiben:

$$F_G = G\frac{mM_{Erde}}{r_{Erde}^2} = \frac{m}{\Gamma}.$$

Die Herleitung der Bewegungsgleichung ergibt

$$\begin{aligned} ma &= F_G \\ \Rightarrow \quad ma &= \frac{m}{\Gamma} \\ \Rightarrow \quad a &= \frac{1}{\Gamma} = konstant \\ \Rightarrow \quad s(t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma} \cdot t^2, \end{aligned}$$

unter der Annahme, dass Anfangsort und -geschwindigkeit Null sind.

Die Bewegungsgleichung ähnelt der bekannten Gleichung für den freien Fall, nur dass die Größe Γ im Nenner anstelle der Fallbeschleunigung bzw. des Ortsfaktors g im Zähler auftritt. Es lässt sich jedoch ein Phantasie-Universum denken, in dem die Bewohner ihre Bewegungsgleichung wie in Gleichung 5.1 schreiben und Γ als Ortsfaktor bezeichnen. Der Wert für Γ wäre zwar ein anderer, das Aussehen der Gleichung jedoch wie in 5.1. Obwohl die physikalischen Gesetze die gleichen wären, müsste man vorsichtig sein, wenn man mit den Bewohnern des Phantasie-Universums über den Einfluss des Ortsfaktors sprechen wollte.

Die Interpretation der Gleichung dürfte nicht aufgrund der bekannten physikalischen Gesetzmäßigkeiten erfolgen, sondern müsste aufgrund der Struktur der Gleichung erfolgen. Diese Idee ist in der Aufgabe „Phantasie-Universum“ umgesetzt (siehe Abbildung 5.11). Um jedoch die Schüler nachdrücklich davon abzuhalten, die Gleichung aufgrund bekannter physikalischer Gesetzmäßigkeiten zu interpretieren, wird das Phantasie-Universum so beschrieben, dass dort andere und unbekannte physikalische Gesetze gelten. Dies stellt keinen Widerspruch dar, da es die natürliche Haltung wäre, wenn man zufällig in das Phantasie-Universum gelänge und mit dessen Bewohnern über deren Bewegungsgesetz sprechen wollte. Am Ende würde sich dann herausstellen, dass doch die gleichen physikalischen Gesetze zugrunde liegen.

Die ersten beiden Teilaufgaben stellen einen relativ einfachen Einstieg dar. Sie benötigen kein weitergehendes physikalisches Verständnis. Die dritte Aussage ist ebenfalls direkt zu interpretieren, allerdings werden hier schon alle drei physikalischen Größen miteinander in Beziehung gesetzt. Das Konzept einer größeren Geschwindigkeit als mehr Weg in gleicher Zeit tritt hier bereits indirekt auf, allerdings wird dieser Zusammenhang nicht benötigt. Dies ändert sich in den letzten beiden Aufgabenteilen. In der vierten muss der Zusammenhang von Fallgeschwindigkeit und mehr zurückgelegtem Weg in gleichen Zeitabständen benutzt werden, um die Aussage beurteilen zu können. In der letzten Teilaufgabe muss eine ähnliche Verbindung hergestellt werden, da „langsamer fallen“ als weniger Weg in gleichen Zeiten verstanden werden muss.

Phantasie-Universum

Stellt euch vor, ihr gelangt in ein Phantasie-Universum, in dem andere physikalische Gesetze gelten als bei uns. So wird in dieser Phantasie-Welt der freie Fall nicht durch die Gleichung $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ wie bei uns beschrieben, sondern durch $\mathcal{S} = \frac{1}{2 \cdot \mathcal{G}} \cdot \mathcal{T}^2$ (Die etwas anderen Symbole sollen nur daran erinnern, dass sie sich auf die entsprechenden physikalischen Größen in der Phantasie-Welt beziehen und daher auch unbekannte Einheiten haben. Ihre Bedeutung ist aber analog zu den bekannten Symbolen aus unserer Welt)! Welche der folgenden Aussagen über den freien Fall (die in unserer wirklichen Welt alle korrekt sind!) wären daher in dieser Phantasie-Welt nicht korrekt?

a) Der gefallene Weg hängt von der Fallzeit und dem Ortsfaktor ab.

b) Wenn man länger fällt, legt man mehr Weg zurück.

c) Wäre der Ortsfaktor größer, würde man mehr Weg in der gleichen Zeit zurücklegen.

d) Die Fallgeschwindigkeit nimmt zu, je länger man fällt.

e) Wäre der Ortsfaktor kleiner, würde man langsamer fallen.

Begründet bitte eure Antwort!

Abbildung 5.11.: Aufgabe „Phantasie-Universum“ zum Interpretieren physikalischen Verhaltens aus einer unbekannten Formel.

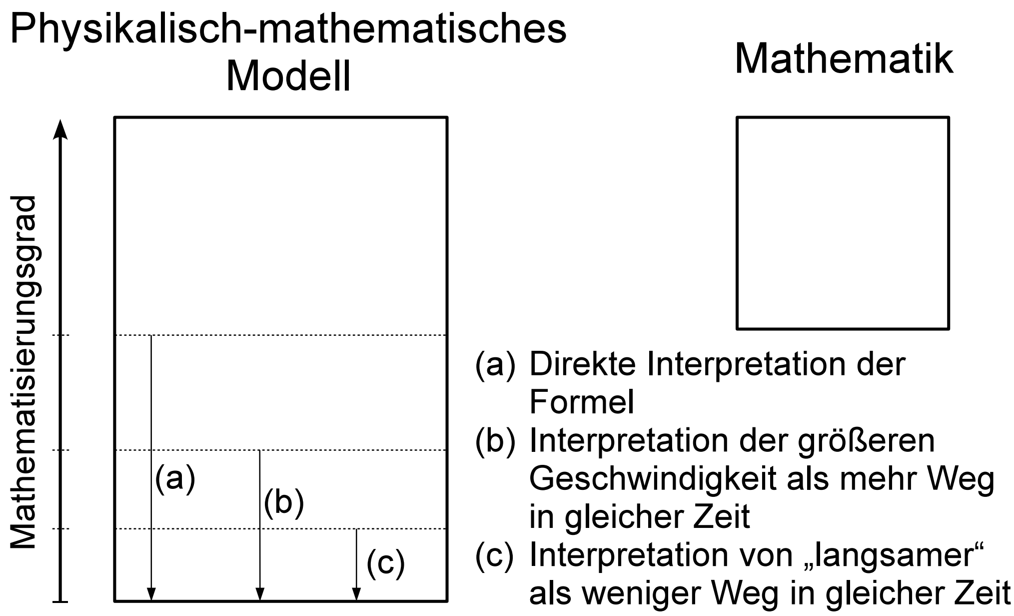


Abbildung 5.12.: Repräsentation der notwendigen Interpretationen bei der Aufgabe „Phantasie-Universum". Bei den Aufgabenteilen a), b) und c) muss der Interpretationsschritt (a) vollzogen werden. Die Formel kann direkt mit den Aussagen der Teilaufgaben in Bezug gesetzt werden. Die Aussage der Teilaufgabe d) enthält dagegen noch das Konzept der Geschwindigkeit, das nicht direkt in der Formel enthalten ist. Geschwindigkeit ist bereits ein mathematisch-physikalisches Konzept, so dass die Aussage d) ebenfalls interpretiert und physikalisch als mehr Weg in gleicher Zeit verstanden werden muss. Für die Teilaufgabe d) sind daher die Interpretationen (a) und (b) durchzuführen. Ähnlich ist es bei Teilaufgabe e), in der der Begriff „langsamer" interpretiert werden muss. Bei dieser Aufgabe sind die Interpretationen (a) und (c) zu vollziehen. Der Begriff „langsamer" ist auf einem niedrigeren Niveau als die Geschwindigkeit angeordnet, da es sich einerseits um einen intuitiven und alltagsnahen Begriff handelt, andererseits bereits eine Interpretation einer kleineren Geschwindigkeit darstellt und deshalb unterhalb der Geschwindigkeit angeordnet sein muss.

Die besondere Schwierigkeit bei den letzten beiden Teilaufgaben liegt darin, dass die Aussagen nicht direkt mit der Formel in Beziehung gesetzt werden können. Die Aussagen beinhalten ihrerseits bereits mathematisierte Begriffe, die zuerst physikalisch verstanden werden müssen, um sie mit der Formel in Beziehung setzen zu können. In der Formel tauchen nur die Größen Zeit und Ort auf, die Geschwindigkeit ist nicht enthalten. Die Geschwindigkeit muss daher mit Zeit und Ort in Beziehung gesetzt werden, was bedeutet, dass der mathematische Charakter der Geschwindigkeit als zeitliche Änderungsrate des Ortes verstanden sein muss. Die notwendigen Interpretationen zur vierten Teilaufgabe bestehen also einerseits in einer Interpretation der Geschwindigkeit und andererseits in einer Interpretation der Formel (siehe auch Abbildung 5.12).

Bei der letzten Teilaufgabe ist die Situation ähnlich. Der Begriff „langsamer" bezieht sich ebenfalls auf die Geschwindigkeit und benötigt daher auch eine Interpretation. Allerdings ist „langsam" eine alltagsnahe Formulierung einer geringeren Geschwindigkeit, es steckt also bereits eine gewisse Interpretation in dem Begriff. Aus diesem Grund ist die Interpretation von "langsamer" als weniger Weg in gleicher Zeit ein kleinerer Interpretationsschritt als die entsprechende Interpretation der Geschwindigkeit in der vierten Teilaufgabe. In der Repräsentation des physikalischen Mathematisierungsmodells (Abb. 5.12) liegt das entsprechende Niveau deshalb unterhalb des zur Geschwindigkeit gehörigen Niveaus.

5.4.4. Bedeutung einer Formel erklären

Zur Diagnose des Schülerverständnisses physikalischer Gleichungen ist als wichtiger Baustein zu ergründen, was sich die Schüler unter der physikalischen Bedeutung einzelner Terme vorstellen. Eine ausformulierte Antwort zu dieser Frage gibt einen Einblick, was die Schüler unter dieser elementaren Interpretation verstehen. So spielt es für das Verständnis des Zusammenhangs von Physik und Mathematik eine wichtige Rolle, ob die Schüler die physikalische Bedeutung einer Formel eher in der Benennung der Symbole sehen oder ob sie einen umfassenderen Blick einnehmen und die Bedeutung mit dem zugehörigen Verhalten und den physikalischen Gesetzmäßigkeiten in Verbindung bringen.

In der Aufgabe zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung wird nach der physikalischen Bedeutung der einzelnen Terme in der vollständigen Bewegungsgleichung — die die Anfangswerte nicht Null setzt — gefragt (siehe Abbildung 5.13). Dabei ist zuerst einmal offen, was die Schüler unter der Bedeutung der Summanden verstehen. Ein tiefes Verständnis der Gleichung sollte jedoch beinhalten, dass die Bedeutung auch in den physikalischen Vorgängen, die die einzelnen Terme beschreiben, gesehen wird. So sollten alle Summanden als Beiträge zur gesamten Strecke gesehen werden, wobei der erste den Beitrag aufgrund der beschleunigten Bewegung beschreibt, der zweite den Anteil der gleichförmigen Bewegung berücksichtigt und der dritte den Anfangsort repräsentiert.

Die Repräsentation dieser Aufgabenstellung in dem physikalischen Mathematisierungsmodell würde aus einem Interpretationspfeil von dem mathematisierten Niveau der Gleichung hin zum untersten qualitativen Niveau des physikalisch-mathematischen bestehen. Um die Auseinandersetzung mit der Gleichung zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung zu vertiefen und weitere strukturelle Fähigkeiten anzusprechen, wird eine zweite Teilaufgabe ergänzt, in der nach dem Einfluss der Terme auf die zurückgelegte Strecke zu verschiedenen Zeiten gefragt wird.

Diese zweite Frage kann nicht direkt aus der Gleichung heraus gelesen werden. Es muss erkannt werden, dass die Frage durch eine mathematische Untersuchung beantwortet werden muss, so dass zuerst die Fragestellung mathematisiert werden muss. Die mathematisierte Bedeutung der Frage könnte folgendermaßen formuliert werden: Bei welchen Werten der Variablen t nimmt welcher der Funktionsterme den größten Wert an? Ist die Frage so oder ähnlich mathematisiert, kann sie in Bezug zur Gleichung gesetzt werden. Um die Frage mathematisch beantworten zu können, ist vorher noch ein weiterer Mathematisierungsschritt notwendig. Die Terme der Gleichung müssen in eine mathematische Form gebracht werden, die einen Vergleich der Terme ermöglicht, zum Beispiel $v_0 t > s_0$ für die Beantwortung der Frage, für welche t der zweite Term größer als der dritte ist.

Ist die Frage soweit mathematisiert, können die erhaltenen Ungleichungen umgeformt werden, so dass mathematische Ergebnisse erhalten werden. Diese Ergebnisse erfordern abschließend eine Interpretation, so dass die ursprüngliche physikalische Fragestellung beantwortet werden kann. Die Abfolge dieser Schritte in dem physikalischen Mathema-

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Die Formel für den zurückgelegten Weg bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung lautet: $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$.

a) Erklärt, welche physikalische Bedeutung die einzelnen Summanden ($\frac{1}{2}at^2$ bzw. $v_0 t$ bzw. s_0) haben.

b) Entscheidet, welcher der Summanden zu welchen Zeiten den größten Einfluss auf die zurückgelegte Strecke hat.

Abbildung 5.13.: Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“ zum Erklären der Bedeutung einer Formel sowie zum Übersetzen physikalischen Verhaltens in mathematische Strukturen.

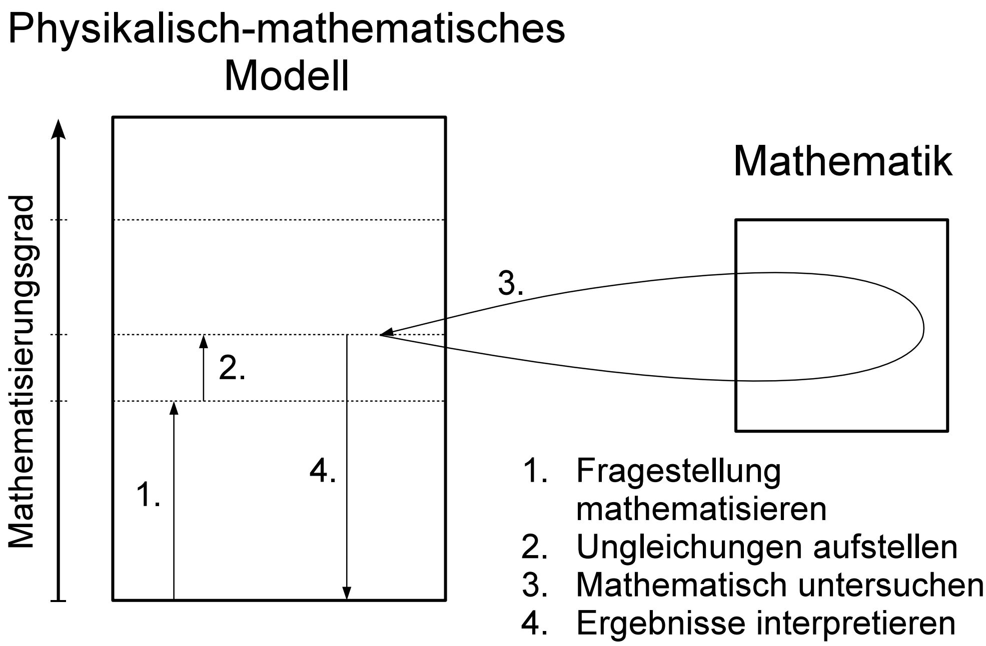


Abbildung 5.14.: Repräsentation der notwendigen Schritte bei der Bearbeitung der zweiten Teilaufgabe der Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“. Zuerst ist es wichtig, die Fragestellung zu mathematisieren, um sie mit der Gleichung in Beziehung setzen zu können. Ist dies geschehen, müssen die Terme in eine mathematische Struktur gebracht werden, die die Beantwortung der Frage ermöglicht: es müssen Ungleichungen aufgestellt werden. Damit ist eine mathematische Untersuchung möglich, die die gesuchten Zeiten liefert. Eine Interpretation der mathematischen Ergebnisse ermöglicht die Beantwortung der ursprünglichen physikalischen Fragestellung. Der Schritt der mathematischen Untersuchung, der durch die technischen Fähigkeiten repräsentiert wird, ist allerdings nicht zwingend notwendig. Ein gröberer und qualitativer Lösungsweg würde zudem keine Ungleichungen aufstellen, sondern aufbauend auf der Erkenntnis, dass die Größenverhältnisse der einzelnen Terme in Betracht gezogen werden müssen (entspricht Schritt 2 in dem Modell), eine Abschätzung der relevanten Zeitpunkte vornehmen.

tisierungsmodell ist in Abbildung 5.14 dargestellt. Wichtig hierbei zu beachten ist, dass dieser ideale Lösungsweg sehr anspruchsvoll ist. Insofern kann von den Schülern nicht erwartet werden, eine saubere mathematische Formulierung der Fragestellung und der zu untersuchenden Ungleichungen aufzustellen. Allerdings ist diese Art der Beantwortung nicht unbedingt nötig. Es ist durchaus ausreichend, die vorgestellten Schritte in einer gröberen und qualitativen Art und Weise zu durchlaufen.

Wichtig ist zu erkennen, dass die Fragestellung mathematisiert werden muss um sie beantworten zu können. Daran anknüpfend kann eine qualitative Analyse der Gleichung erfolgen, in der erkannt wird, dass es um das Abschätzen der Terme zueinander geht. Ein konstanter Term hat sicherlich bei $t = 0$ den größten Einfluss, während der Term, der quadratisch in t ist, bei genügend großen Zeiten den größten Beitrag liefert. Der in t lineare Term kann je nach Größe der Vorfaktoren zwischenzeitlich den größten Einfluss haben. Eine in dieser Art und Weise geführte qualitative Argumentation verzichtet auf das mathematisch exakte Berechnen der entsprechenden Zeiten, weshalb die technischen Fähigkeiten (vergleiche Abbildung 5.14) nicht mehr benötigt würden. Dies wäre durchaus im Sinne eines konzeptuell-mathematischen Physikunterrichts.

5.4.5. Zusammenfassung

Die vorgestellten Aufgaben zur konzeptuell-mathematischen Physik sprechen verschiedene Aspekte der strukturellen Fähigkeiten an. Teilweise sind zwar kurze technische Einschübe nötig, allerdings liegt der Schwerpunkt immer auf dem inhaltlichen Übersetzen zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischen Strukturen. Die rein mathematischen Berechnungen sind durch diesen Fokus direkt in die Untersuchung der physikalisch-mathematischen Strukturen eingebunden und nehmen in diesem Rahmen die ihnen angemessene Rolle von Hilfsmitteln zur Beantwortung inhaltlicher Fragen ein.

Die Entwicklung der Aufgabenstellungen stand unter dem Ziel, die Schülervorstellungen und Verständnisschwierigkeiten bei der Übersetzung zwischen Physik und Mathematik zu untersuchen. Diese Fragestellungen stellen den Kern der empirischen Untersuchung dar, die im nächsten Teil dieser Arbeit beschrieben wird. Insofern sind die Aufgaben noch nicht für die direkte Anwendung im Unterricht angepasst. Für diesen Zweck sind eventuell einige Umformulierungen oder Hilfestellungen nötig. Die empirische Untersuchung kann hierfür ebenfalls Hinweise liefern.

Weiterhin beschreiben die mit Hilfe des Modells repräsentierten Lösungswege kein reales Schülerverhalten, sondern stellen die optimalen Strategien bzw. die notwendigen strukturellen Fähigkeiten dar. Deren tatsächliches Auftreten und deren Einordnung in reale Lösungswege ist hiermit nicht erfasst. Die Repräsentationen zeigen jedoch, welche Fähigkeiten angesprochen werden und welche unterschiedlichen Aspekte der Übersetzung zwischen Physik und Mathematik in den Aufgaben enthalten sind.

Die vorgestellten Aufgaben stellen eine Auswahl an Ideen dar, die konzeptuell-mathematische Physik zu thematisieren. Für eine Einbettung in den Physikunterricht sind weitere Aufgaben nötig. Als Leitfaden bei der Erstellung ähnlicher Aufgaben kann das physikalische Mathematisierungsmodell bzw. der revidierte Modellierungskreislauf dienen. Wie hier veranschaulicht, wird dadurch sowohl der Fokus auf die strukturellen Fähigkeiten deutlich als auch deren Vielschichtigkeit und unterschiedliche Einbettung in die verschiedenen Aufgaben. Zudem dient das Modell als Mittel zur Überprüfung, ob das Prinzip der konzeptuell-mathematischen Physik wirklich in den Aufgaben enthalten ist.

Teil II.

Empirie

6. Design der empirischen Studie

Im theoretischen Teil dieser Arbeit wurde der lerntheoretische Rahmen und Forschungsstand zur Rolle der Mathematik beim Physiklernen abgesteckt sowie darauf aufbauend eine Theorie zur konzeptuell-mathematischen Physik entwickelt und in der Erarbeitung eines didaktischen Modells zum mathematischen Denken in der Physik zum Ausdruck gebracht. Im Rahmen dieser Theorie, die auch als Elementarisierung theoretischer Physik aufzufassen ist, wurde die Aufgabenkultur als passendes didaktisches Element zur Umsetzung in der Unterrichtspraxis thematisiert und mit der Vorstellung neuer Aufgaben zur konzeptuell-mathematischen Physik konkretisiert.

Damit wurden der theoretische Rahmen der konzeptuell-mathematischen Physik sowie Möglichkeiten zur Umsetzung bereitgestellt. Allerdings liegen noch keine empirischen Erkenntnisse vor, weder bezüglich Lernschwierigkeiten noch im Hinblick auf die praktische Umsetzbarkeit. Um einen Beitrag in dieser Richtung zu leisten und den theoretischen Rahmen um empirische Erkenntnisse zu ergänzen, wurde eine Studie durchgeführt, deren Design in diesem Kapitel erläutert wird.

6.1. Fragestellungen

Wie bereits in Kapitel 2.1 zur konstruktivistischen Sichtweise erläutert, stellt das Vorwissen der Schüler einen entscheidenden Punkt beim Lehren und Lernen dar. Aus diesem Grund wurde der Erforschung von Schülervorstellungen viel Raum in der Physikdidaktik beigemessen. Obwohl mittlerweile zu fast allen Themengebieten der Physik eine umfangreiche Kenntnis zu Schülervorstellungen und Präkonzepten vorliegt, wurde der Bereich des mathematisch-physikalischen Verständnisses und der Übersetzung zwischen Physik und Mathematik dabei ausgespart.

Von normativer Seite liegt mit den symbolischen Formen von Sherin (2001), die in Kapitel 2.5 diskutiert wurden, bereits eine umfangreiche Kategorisierung elementarer

Bedeutungen physikalischer Gleichungsstrukturen vor. Die symbolischen Formen zeigen einerseits mit welchen Bedeutungen Studenten umgehen können, andererseits was das Ziel einer sinnvollen Übersetzung auch bei Schülern sein muss. Zudem lässt sich erahnen, welche Problematik mit dieser Komplexität an Übersetzungsmöglichkeiten einhergehen kann.

Mit den symbolischen Formen ist bekannt, was Studenten können und wo das Ziel bei Schülern liegt. Es lässt allerdings noch keine Rückschlüsse darauf zu, was Schüler können und welchen Problemen und Schwierigkeiten sie bei der Übersetzung zwischen Physik und Mathematik begegnen. Erst mit diesem Wissen kann jedoch die Lücke geschlossen werden, das Lehren und Lernen eines sinnvollen Umgangs mit der Mathematik in der Physik anzugehen.

Aus der Wichtigkeit des Erfassens der Lernerperspektive und der Bedeutung und Schwierigkeit der Übersetzung zwischen Physik und Mathematik folgt die Untersuchung von Schülervorstellungen und Verständnisschwierigkeiten zu dieser Thematik als dringliche Aufgabe. Aus diesem Grund lautet die Hauptfragestellung dieser Arbeit:

1. Welche Probleme lassen sich im Verständnis der Schüler beim Verbinden von Physik und Mathematik identifizieren?

Mit der Beantwortung dieser Frage wird ein zentrales Element für einen konzeptuell-mathematischen Physikunterricht bereitgestellt. Zudem wird ein Beitrag zu der bisher ausgesparten Untersuchung von Schülervorstellungen zur Verbindung von Mathematik und Physik geliefert. Eine Analyse der Probleme und Schwierigkeiten, die die Schüler bei einer konzeptuell-mathematisch orientierten physikalischen Argumentation erfahren, zeigt einerseits auf welchem Verständnis zur Verbindung von Physik und Mathematik aufgebaut werden muss, andererseits lassen sich Hinweise entnehmen, inwieweit Schüler mit konzeptuell-mathematischer Physik umgehen können.

Für eine fundierte Beurteilung dieses zweiten Aspektes ist jedoch eine weitergehende Analyse nötig. Die Frage, inwieweit die Schüler konzeptuell-mathematisch in der Physik arbeiten können, umfasst viele Facetten. Um einen ersten Schritt in diese Richtung zu gehen und einige Gesichtspunkte dazu zu beleuchten, wird eine weitere Fragestellung untersucht:

2. Wie kann die Verbindung von Physik und Mathematik hilfreich für die Schüler sein?

Die Untersuchung dieser Frage wird allerdings nur einige Aspekte dieser Thematik beleuchten können, das Hauptaugenmerk dieser Untersuchung ist auf die Problemanalyse ausgerichtet. Trotzdem lassen sich Erkenntnisse dazu erwarten, wie die Bedingungen und Auswirkungen eines erfolgreichen Abgleichs zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischer Analyse aussehen.

Dadurch ergibt sich auch ein umfassenderes Bild von den Problemen und Schwierigkeiten der Schüler. Das Erfassen dessen, was die Schüler können, geht notwendigerweise mit dem Erfassen der Probleme einher. An der Grenze zwischen erfolgreicher Übersetzung und Verständnisschwierigkeiten zeigt sich der Stand des Vorwissens und Verständnisses von der Verbindung zwischen Physik und Mathematik im Denken der Schüler.

6.2. Methodik

Die Fragestellungen erfordern ein explorativ-qualitatives Studiendesign. Es geht um das Beschreiben des Schülerverständnisses und das Identifizieren von Problemen beim Verbinden von Physik und Mathematik. Um das Denken der Schüler unter dieser Perspektive analysieren zu können, müssen die Schüler zur Übersetzung zwischen Physik und Mathematik angeregt werden. Dafür eignen sich speziell konstruierte Aufgaben, die den Fokus auf die inhaltliche Übersetzung zwischen Physik und Mathematik und damit auf die strukturellen Fähigkeiten legen. Durch die Beobachtung des Lösungsvorganges von Schülern bei der Auseinandersetzung mit diesen Aufgaben lassen sich die oben genannten Fragestellungen beantworten.

Damit ist bereits das prinzipielle Herangehen an die Untersuchung abgesteckt. Schüler werden eingeladen, um unter Beobachtung Aufgaben zu bearbeiten. Dabei müssen die Denkvorgänge geäußert und aufgezeichnet werden, so dass für die Auswertung ein Nachvollziehen der Gedankengänge möglich ist. Die aufgezeichneten Äußerungen müssen mit den schriftlichen Aufzeichnungen der Schüler in Verbindung gebracht werden können. Im Folgenden wird die konkrete Umsetzung der verschiedenen methodischen Aspekte näher erläutert.

6.2.1. Aufgabenstellungen

Die benötigten Aufgaben, die die Übersetzung zwischen Physik und Mathematik explizit thematisieren, wurden bereits in Kapitel 5.4 im Rahmen der konzeptuell-mathematischen Physik erarbeitet. Die Aufgaben bauen auf einer engen inhaltlichen Verbindung zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischen Strukturen auf und rücken damit die strukturellen Fähigkeiten in das Zentrum der Aufgabenstellung.

Die vier Aufgabenstellungen beziehen sich dabei auf folgende Schwerpunkte:

1. Diskutieren von Grenzfällen anhand der Aufgabe „Zwei Massen“ (siehe Kapitel 5.4, Seite 90).
2. Physikalische Schlussfolgerungen aus einer Formel ziehen anhand der Aufgabe „Phantasie-Universum“ (siehe Kapitel 5.4, Seite 94).
3. Bedeutung einer Formel erklären sowie physikalisches Verhalten in mathematische Strukturen übersetzen anhand der Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“ (siehe Kapitel 5.4, Seite 97).
4. Aufstellen einer Formel aufgrund physikalischer Überlegungen anhand der Aufgabe „Luftwiderstand“ (siehe Kapitel 5.4, Seite 87).

Für die genaue Erläuterung der Aufgaben sei auf Kapitel 5.4 verwiesen. Durch die Bearbeitung dieser vier konzeptuell-physikalischen Aufgaben werden die Schüler zur aktiven Auseinandersetzung mit der Verbindung von Physik und Mathematik angeregt. Hierbei auftretende Schwierigkeiten und Probleme im Verständnis der Schüler stehen in direktem Bezug zu der Hauptforschungsfrage. Zudem liefert die Aufgabe „Zwei Massen“ die Struktur, die zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage nötig ist, da die Aufgabenstellung sowohl eine qualitativ-physikalische als auch eine mathematische Betrachtung zulässt.

In jeder Aufgabe werden unterschiedliche Aspekte und Schwerpunkte der Verbindung von physikalischer Bedeutung und Mathematik angesprochen, so dass verschiedene Schwierigkeiten zu erwarten sind. Da die vier Aufgaben mehrere Facetten des Zusammenhangs von Physik und Mathematik ansprechen, sollten die diagnostizierten Probleme ebenfalls einen großen Bereich möglicher Schwierigkeiten abdecken und einen umfassenden Einblick in das Verständnis der Schüler geben. Allerdings sind die Aufgaben auf das physikalische Themengebiet der Mechanik — und hier hauptsächlich Kinematik — beschränkt und die mathematischen Strukturen Produkt und Summe sind präsenter als beispielsweise Verhältnis und Differenz. Die auftretenden Probleme und Vorstellungen werden dadurch notwendigerweise beeinflusst, so dass die Erkenntnisse keine vollständige Klassifizierung aller möglichen Verständnisprobleme beim Verbinden von Physik und Mathematik darstellen. Bei Aufgaben zu anderen Themengebieten und anderen mathematischen Strukturen wären sowohl überschneidende als auch ergänzende Ergebnisse zu der hier durchgeführten Untersuchung zu erwarten.

6.2.2. Setting

Bei der konkreten Umsetzung der Beobachtung der Schüler bei der Aufgabenbearbeitung sind zwei kritische Punkte zu beachten. Zum einen müssen die Schüler dazu animiert werden, ihre Gedanken zu äußern. Zum anderen muss eine Umsetzung gefunden werden, wie sowohl die Aussagen als auch die schriftlichen Bearbeitungen der Schüler aufgezeichnet und in Bezug zueinander gesetzt werden können, ohne die Schüler dabei in ihrem Verhalten zu hemmen — eine Gefahr, die bei Videoaufnahmen gegeben ist.

Um den ersten Punkt anzugehen, gibt es hauptsächlich zwei Möglichkeiten, die im Rahmen der Erforschung kognitiver Prozesse beim Problemlösen Verwendung finden: die Methode des „lauten Denkens“ oder Partnerarbeit. Die Methode des lauten Denkens beruht darauf, dass der Schüler aufgefordert wird, seine Gedanken sprachlich zu äußern (van Someren et al., 1994). Er wird zu Beginn instruiert, seine Überlegungen während des Problemlösens zu äußern, ohne sie zu bewerten und gegebenenfalls zurückzuhalten. Es kommt darauf an, dass der Schüler alles äußert was er denkt.

Diese Methode hört sich in der Theorie vielversprechend an, allerdings steigt und fällt ihr praktikabler Nutzen mit der Umsetzbarkeit. Es ist entscheidend, dass der Schüler wirklich möglichst alle seine Gedanken äußert. Da dies jedoch ein unnatürliches Vorgehen darstellt, besteht die Gefahr, dass die Schüler das Äußern der Gedanken vergessen oder sich entweder auf die Aufgabe oder das Gedankenäußern konzentrieren. Zudem wird diese Methode bei Schülern dadurch erschwert, dass sie es aus der Schule gewohnt sind, nicht einfach alles zu sagen, was sie denken. Die Situation ist bei einer Studie ohne Lehrer an der Universität zwar eine andere, trotzdem ist zu befürchten, dass die Schüler gehemmt dabei sind, alle ihre Gedankengänge zu äußern.

Diese Befürchtungen bestätigten sich bei einigen kurzen Tests im Vorfeld der Studie mit Schülern, die Modellierungsaufgaben lösen und dabei ihre Gedanken äußern sollten. Nach den ersten Sätzen wurde die Äußerung der Gedanken meist vergessen und stattdessen die Aufgabe in den Blick genommen. Insbesondere bei Schwierigkeiten und konzentriertem Nachdenken zeigte sich dieses Verhalten verstärkt. Es wäre zwar durchaus möglich gewesen, an der Instruktion der Schüler zu arbeiten und eine eingehendere Schulung vorzunehmen, allerdings schien dieser Aufwand aufgrund des ungewissen Ausgangs und der bestehenden Kritikpunkte nicht angemessen. Die Möglichkeit der Partnerarbeit verspricht, diese Probleme besser in den Griff zu bekommen.

Bei der Partnerarbeit arbeiten zwei Schüler gemeinsam an der Lösung der Aufgabe. Durch den Zwang, einen gemeinsamen Lösungsweg zu erarbeiten und sich über eigene Gedankengänge auszutauschen, wird die Diskussion und damit die verbale Äußerung der Gedanken automatisch angeregt. Das Aussprechen von Überlegungen und Gedanken hat in diesem Kontext nichts Künstliches, sondern ist eine natürliche Handlung. Die Schüler geraten automatisch in die Situation, ihre Gedanken ihrem Partner zu erläutern und somit auch der Beobachtung zugänglich zu machen.

Ein eventuell kritisch anzusehender Aspekt der Partnerarbeit betrifft die zur alleinigen Stillarbeit andersartige Situation. Die Schüler erhalten Anregungen von ihrem Partner und können sich durch das Äußern eigener Gedanken und das Bewerten der Reaktion des Partners auf neue Gedankengänge einlassen, die sie vielleicht nicht gegangen wären, wenn sie allein gearbeitet hätten. Insofern entstehen durch die Partnerarbeit neue Rahmenbedingungen.

Allerdings muss an dieser Stelle genau betrachtet werden, worin der Einfluss der Partnerarbeit besteht. Durch die Interaktion mit einem anderen Menschen können sich die Strategien und Gedankengänge ändern. Es ist jedoch nicht anzunehmen, dass durch die Partnerarbeit ein anderes Verständnis von dem bearbeiteten Stoffgebiet entsteht. Da es in dieser Untersuchung aber darum geht, die Vorstellungen und Schwierigkeiten der Schüler bei der Verbindung von Physik und Mathematik zu untersuchen, ist hier kein entscheidender Einfluss der Partnerarbeit zu befürchten. Die Schwierigkeiten, die die Schüler haben, sind in ihrem Verständnis von dem Zusammenhang zwischen Physik und Mathematik begründet. Es ist nicht anzunehmen, dass sie bei alleiniger Stillarbeit alles verstanden haben, bloß in der Partnerarbeit ihr Verständnis nicht nutzen können.

Ein weiterer Aspekt ist bei der Partnerarbeit zu beachten: Es kann sein, dass einer der beiden Schüler die Aufgabe schneller versteht und mit der Lösung beginnt, bevor der andere die Aufgabenstellung überhaupt verstanden hat. Dann erläutert der schnellere Schüler bereits seine Ideen, während der langsamere Schüler nur zuhört und in eine passive Rolle rutscht. Um diese Situation zu vermeiden, kann den Schülern eine Stillarbeit zu Beginn eingeräumt werden. Wenn die Schüler zuerst ungefähr fünf Minuten die Aufgabenstellung lesen und sich eigene Gedanken und Notizen machen können, ist gewährleistet, dass beide gedanklich in die Aufgabenstellung involviert sind. Nach dieser Anfangsphase kann dann eine gemeinsame Lösung diskutiert werden, in der beide Schüler Ideen zur Aufgabe entwickelt haben.

Damit ist der erste Aspekt zur Untersuchung abgesteckt. Die Schüler arbeiten zu zweit an den Aufgaben und bekommen zu Beginn eine Phase der Stillarbeit zugesprochen, in der sie erste Gedanken zur Lösung entwickeln sollen, um sie anschließend mit ihrem Partner zu diskutieren. Damit ist ein angemessenes Verfahren gefunden, um sowohl die verbale Äußerung der Gedanken zu stimulieren als auch beiden Schülern in der Partnerarbeit die Gelegenheit zum Entwickeln eigener Gedanken zu geben.

Der zweite Aspekt zum Setting betrifft die Aufzeichnung der Schüleräußerungen. Es ist wichtig, dass die sprachliche Diskussion der Schüler aufgezeichnet wird und zugleich in Relation zu den schriftlichen Aufzeichnungen gesetzt werden kann. Um diesen Anforderungen nachzukommen, erscheint die Videoaufzeichnung eine angemessene Methode zu sein. Die Schüler werden bei der Bearbeitung und Diskussion der Aufgaben per Video beobachtet, so dass die Äußerungen mit den schriftlichen Aufzeichnungen in Bezug gesetzt werden können.

Es gibt hierfür zwei Möglichkeiten. Die Schüler können entweder an einer Tafel oder an einem Blatt Papier arbeiten. Beide Varianten haben unterschiedliche Vorzüge. Die Arbeit an der Tafel bietet sich für eine Diskussion an, da es hier der natürlichen Arbeitsweise entspricht, auf der gleichen Tafel zu schreiben und ein gemeinsames Schriftbild zu entwickeln. Zudem fördert die Tafel als gemeinsam genutztes Schreibmedium die Atmosphäre einer Diskussion. Negativ ist allerdings festzustellen, dass durch das Stehen an einer Tafel mit darauf gerichteter Videokamera die Beobachtungssituation besonders betont wird. Zudem kann die Tafel für Schüler zusätzlich mit dem Schulunterricht und Situationen assoziiert werden, in denen sie vor der Klasse in einer Prüfungssituation sind. Diese Situation kann sich durchaus hemmend auf die Bereitschaft der Schüler auswirken, befreit und zwanglos ihre Gedanken zu äußern.

Demgegenüber steht die Partnerarbeit auf einem gemeinsamen Blatt Papier. Hierfür ist eine gute Kamera nötig, die die Auflösung des Geschriebenen gewährleistet. Abgesehen von dieser technischen Hürde, ist die Arbeit mit Zettel und Stift eher mit Einzelarbeit assoziiert, so dass befürchtet werden muss, dass die Schüler nicht so viel und frei diskutieren, wie es an der Tafel der Fall ist. Dafür ist hier die Beobachtungssituation entschärft, da die Schüler sitzen können und die Kamera über ihren Köpfen steht.

In einer kleinen Voruntersuchung mit neun Schülern wurden beide Variationen der Beobachtung und Aufzeichnung ausprobiert. Die Arbeit an einem gemeinsamen Blatt Papier erwies sich als hemmend auf die Diskussionsbereitschaft. Hier war ein deutlicher Vorzug der Arbeit an der Tafel festzustellen. Allerdings hing es hier stark von der Persönlichkeit der Schüler ab, ob eine ausgeglichene Diskussion zustande kam. Die dargelegten Befürchtungen bezüglich der Exposition an der Tafel vor einer Kamera war für einige Schüler unangenehm.

Aus diesen Beobachtungen und den dargelegten Kritikpunkten ergibt sich, dass die Arbeit an der Tafel günstig für eine rege Diskussion beider Partner ist, wenn die Situation der Beobachtung mittels Videokamera entschärft werden kann. Mit Hilfe einer neueren technischen Entwicklung ist es möglich, die Arbeit an einer Tafel ohne zusätzliche Videoaufzeichnung zu bewerkstelligen. Die verstärkt in Schulen zum Einsatz kommenden interaktiven Tafeln stellen auch für die wissenschaftliche Forschung ein geeignetes Medium dar. Die interaktiven Tafeln projizieren einen Computerdesktop per Beamer auf eine weiße Tafel und erlauben die Steuerung der Maus und entsprechender Tafelsoftware mit passenden Stiften. Dadurch kann mit den Stiften sowohl wie an einer normalen Tafel geschrieben als auch der Computer bedient werden.

Die Computerunterstützung der interaktiven Tafeln ermöglicht es, ein Desktopvideo aufzunehmen. Dadurch kann der Bildschirminhalt, der auf die Tafel projiziert wird, in einer Videodatei gespeichert werden. Dazu kann synchron der Ton aufgenommen und in der Videodatei verarbeitet werden. Die Bearbeitung der Aufgaben an der interaktiven Tafel bietet daher die Möglichkeit, das Schriftbild synchron zu den verbalen Äußerungen aufzunehmen, ohne eine Videokamera einzusetzen. Zwar sind die Schüler und damit auch ihre Gestik und Mimik nicht bildlich erfasst, dafür findet jedoch eine Aufzeichnung statt, ohne dass die Schüler in einer Beobachtungssituation sind.

Der Einsatz mit einer interaktiven Tafel wurde ebenfalls im Rahmen der Voruntersuchung getestet. Dabei haben sich die Erwartungen bestätigt. Die Schüler haben sich freier und unbeobachteter im Vergleich zur Videoaufnahme gefühlt. Zudem hat die interaktive Tafel als neues Medium das Interesse der Schüler geweckt und war in diesem Sinne ein Faktor, der zur Motivation der Schüler beigetragen hat. Die Einschränkung in Bezug auf eine Nichterfassung der Mimik und Gestik erscheint in diesem Rahmen als hinnehmbar, da es vorrangig auf die verbalen und schriftlichen Äußerungen der Schüler ankommt. Eine Analyse im Hinblick auf Gestik und Mimik wird ohnehin nicht angestrebt.

Zusammenfassend lässt sich das Setting der Untersuchung wie folgt beschreiben: Die Schüler werden an die Universität eingeladen, um in Partnerarbeit Aufgaben an einer interaktiven Tafel zu bearbeiten. Zu Beginn bekommen die Schüler ungefähr fünf Minuten Zeit, um die Aufgaben allein und in Ruhe zu durchdenken. Anschließend wird eine gemeinsame Lösung an der interaktiven Tafel erarbeitet und diskutiert. Die schriftlichen und verbalen Äußerungen werden mit Hilfe eines Desktopvideos aufgezeichnet. Zur Optimierung der Tonaufzeichnungen bekommen die Schüler Krawattenmikrophone angesteckt. Zusätzlich wird das fertige Tafelbild am Ende jeder Aufgabenbearbeitung abgespeichert.

6.2.3. Transkription und Auswertung

Um eine flexible Auswertung der Aufzeichnungen zu ermöglichen müssen die Videodateien transkribiert werden. In den Transkripten kann zusätzlich vermerkt werden, welche schriftlichen Aufzeichnungen der Schüler erfolgen. Somit sind in den Transkripten alle wichtigen Informationen der Videos enthalten, da in den Videodateien ebenfalls keine Mimik und Gestik erkennbar ist. Auch Betonungen oder andere Lautäußerungen, wie beispielsweise Lachen oder Seufzen, können in den Transkripten vermerkt werden.

Die Transkripte sind in einer Tabellenform angeordnet, so dass jedem der beiden Schüler eine eigene Spalte zugewiesen wird. Zusätzlich gibt es eine Spalte für die Zeit und eine für Anmerkungen, in der zum Beispiel das Schriftbild notiert wird. Die Zeilen markieren das Fortlaufen der Zeit, wobei eine neue Zeile bei einer neuen Aktion angefangen wird, wie es beispielsweise bei einem Sprecherwechsel der Fall ist.

Die Videodateien wurden teilweise vom Autor selbst, teilweise von studentischen Hilfskräften transkribiert. Um eine einheitliche Transkription zu gewährleisten, wurden Regeln zum Transkribieren aufgestellt. In Kuckartz (2010, S. 44) sind leicht umsetzbare Transkriptionsregeln für den Fall vorgeschlagen, dass die Transkripte nicht im Hinblick auf sprachliche, sondern auf inhaltliche Aspekte ausgewertet werden sollen. Da dies in dieser Arbeit der Fall ist, ergeben sich folgende Transkriptionsregeln:

1. „Sinngemäß wörtlich“ transkribieren: am Wortlaut orientieren, allerdings ist die Hauptsache, dass der inhaltliche Sinn erhalten bleibt. Es kann also „da ham wir doch jetzte doch so ein“ auch als „da ham wir doch jetzt so ein“ verschriftlicht werden.

2. Sprache kann (muss aber nicht) geglättet werden (z.B. „so'n“ in „so ein“, „ham“ in „haben“). Dialekte können vernachlässigt werden.
3. Deutliche Pausen durch „. . . “ kennzeichnen.
4. Unvollendete oder (nach Unterbrechung) weiter geführte Sätze durch „. . . “ am Ende bzw. Anfang kennzeichnen.
5. Lautäußerungen (hmm, mhm, aha, häh?, etc.) verschriftlichen, allerdings eine Abkürzung pro Bedeutung.
6. Lautäußerungen, die eine Bedeutung für die Interpretation haben, in Klammern dazu schreiben (z.B. (lachen)).
7. Unverständliche Passagen können mit „(unverständlich)“ gekennzeichnet werden.
8. Sprecherwechsel durch neue Zeile und andere Spalte kennzeichnen.
9. Gleichzeitiges Sprechen durch Schreiben in beiden Sprecherspalten derselben Zeile kennzeichnen.
10. Von Schülern Geschriebenes in Spalte „Anmerkungen“ schreiben. Wenn synchron zu Gesprochenem, dann in gleicher Zeile, ansonsten in neue Zeile.
11. Weitere Besonderheiten oder Anmerkungen in Spalte „Anmerkungen“ notieren.
12. ca. alle 30 Sekunden die Zeit notieren.
13. Nach langen Sprechpausen ebenfalls die Zeit notieren.

Die Auswertung der Transkripte wird an der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) orientiert. Dadurch wird ein Rahmen vorgegeben, der eine strukturierte qualitative Auswertung der Beobachtungen gewährleistet. Insbesondere die qualitative Technik des Zusammenfassens (Mayring, 2010, S. 67 ff.) liefert die notwendige Struktur zur induktiven Konstruktion von Kategorien aus den Transkripten. Weitere Details zur Auswertung werden jeweils in den methodischen Vorbemerkungen zu den Forschungsfragen (Kapitel 8.1 und 11.1) thematisiert.

6.3. Struktur der Datenerhebung und Ablauf der Studie

Es wurden 30 Schüler verschiedener Dresdener Gymnasien der Klassenstufen 9 und 10 an die Universität eingeladen, um die konzeptuell-mathematischen Physikaufgaben in Partnerarbeit an einer interaktiven Tafel zu bearbeiten. Als Motivation und Gegenleistung für die freiwillige Teilnahme wurde den Schülern ein Gutschein über zwei Nachhilfestunden in Physik oder Mathematik ausgehändigt. Da die Teilnahme auf ebenfalls ungefähr zwei Stunden hinauslief, wurde dadurch eine angemessene Gegenleistung geliefert. Zudem besteht die Hoffnung, durch die Nachhilfegutscheine auch schwächere Schüler zur Teilnahme zu bewegen.

Die Bearbeitung der konzeptuell-mathematischen Physikaufgaben wurde durch weitere Aspekte zur Datenerhebung ergänzt. Es wurden einige persönliche Daten und Kontrollparameter erhoben und es sollten zwei Standardaufgaben an der interaktiven Tafel sowie drei schriftliche Aufgaben bearbeitet werden. Der Ablauf gliederte sich dabei wie folgt:

1. Erhebung der persönlichen Daten und Kontrollparameter
2. Zwei schriftliche mathematische Aufgaben
3. Aufgabenbearbeitung an der interaktiven Tafel
    a) Standardaufgabe
    b) Vier konzeptuell-mathematische Physikaufgaben
    c) Standardaufgabe
4. Eine schriftliche physikalisch-mathematische Aufgabe

Im Folgenden werden die Erhebung der persönlichen Daten und Kontrollparameter, die schriftlichen Aufgaben sowie die Standardaufgaben näher erläutert.

6.3.1. Persönliche Daten und Kontrollparameter

Um einen Eindruck von der Stichprobe der teilnehmenden Schüler zu erhalten, wurden einige persönliche Daten und Kontrollparameter erhoben. Diese werden nicht im Detail analysiert und in ihrem Bezug zu anderen Aspekten der Studie untersucht, da aufgrund der geringen Teilnehmerzahlen bei qualitativen Studien keine repräsentativen Ergebnisse zu erwarten sind. Allerdings liefern die Daten eine Beschreibung der Stichprobe, so dass ein qualitativer Eindruck einiger Einflussfaktoren, wie beispielsweise der Leistung, erhalten wird.

Aus diesen Gründen wurde neben der Erfassung der Schule, der Klassenstufe, des Alters und des Geschlechts der Schüler auch nach den Schulnoten der zurückliegenden drei Zeugnisse der Fächer Physik, Mathematik und Deutsch gefragt. Zur weiteren Einschätzung der physikalischen Fähigkeiten wurde das fachspezifische Selbstkonzept der Schüler erhoben. Dabei wurde ein kurzer Fragebogen aus sieben Items benutzt, der für die IPN-Interessenstudie (Hoffmann et al., 1998) entwickelt wurde (siehe Abbildung 6.1). Berger (2000) hat diesen Subtest ebenfalls benutzt und die Reliabilität zu $\alpha = .91$ angegeben. Aufgrund dieser hohen Zuverlässigkeit bei gleichzeitiger Kürze eignen sich die Fragen für eine grobe Abschätzung der subjektiven Einschätzungen der Schüler zu ihrer physikalischen Leistung.

Anschließend wurde noch die Frage „Was ist deiner Meinung nach die Aufgabe von Formeln in der Physik?“ gestellt, zu der die Schüler eine kurze schriftliche Antwort verfassen sollten. Damit lassen sich die Vorstellungen der Schüler bezüglich der Rolle von Formeln in der Physik grob skizzieren. Die Beantwortung aller Daten und Fragen nahm ungefähr fünf Minuten Zeit in Anspruch und fand zu Beginn statt.

Die folgenden Items müssen auf einer fünfstufigen Skala von sehr gut bis sehr schlecht bewertet werden.

1. Ich verstehe den Stoff in Physik ...
2. Ich behalte den Stoff in Physik ...
3. Meine Leistungen in Physik sind nach meiner eigenen Einschätzung ...
4. Ich beteilige mich am Physikunterricht ...
5. Ich glaube, dass mich meine Mitschüler in Physik für ... halten.
6. Ich glaube, dass mein Physiklehrer/meine Physiklehrerin meine Leistungen in Physik als ... einschätzt.
7. Ich erwarte, dass in Zukunft meine Leistungen in Physik ... sein werden.

Abbildung 6.1.: Fragen zum fachbezogenen Selbstkonzept nach Hoffmann et al. (1998, S. 65). Die Reliabilität dieses Subtests liegt nach Berger (2000, S. 171) bei dem sehr guten Wert von $\alpha = .91$.

6.3.2. Schriftliche Aufgaben

Um einen zusätzlichen Eindruck einiger grundlegender mathematischer Fähigkeiten sowohl im mathematischen als auch im physikalischen Kontext zu erhalten, wurden drei schriftliche Aufgaben von den Schülern bearbeitet. Die beiden mathematischen Aufgaben wurden im Anschluss an die Erhebung der persönlichen Daten von den Schülern bearbeitet. Die dritte Aufgabe bezieht sich auf ähnliche mathematische Inhalte, jedoch im physikalischen Kontext, und wurde zum Abschluss der Untersuchung in stiller Einzelarbeit bearbeitet.

Die erste der mathematischen Aufgaben bezieht sich auf den Umgang mit Funktionen. Es ist eine quadratische Funktion gegeben, zu der drei Fragen gestellt werden (siehe Abbildung 6.2, Aufgabe 1). Die ersten beiden beziehen sich auf das Aussehen der Funktion, wenn die Funktionsvariable x um eine zusätzliche Größe ergänzt wird, entweder additiv oder multiplikativ. Die Aufgabe kann sowohl graphisch als auch durch Hinschreiben der neuen Funktionsgleichung gelöst werden. Im Zentrum steht hier die relativ einfache Mathematisierung von Bedeutungen, da „um b zunehmen" bzw. „um den Faktor c vergrößern" in die mathematische Struktur übersetzt werden muss.

Die dritte Frage zu dieser Funktion erfordert das Aufstellen einer Ungleichung. Es ist eine zusätzliche quadratische Funktion mit einem anderen Vorfaktor gegeben. Es wird nach der Bedingung für diesen Vorfaktor gefragt, so dass die neue Funktion bei einem gegebenen Funktionswert kleiner als die ursprüngliche Funktion bei einem anderen gegebenen Funktionswert ist. Dies ist die komplexeste Unterfrage, die bereits das Aufstellen einer mathematischen Struktur aufgrund einer (abstrakten) Situationsbeschreibung

1. Betrachte die Funktion $f(x) = ax^2$.
   a) Wie sieht $f(x)$ aus, wenn x um b zunimmt?
   b) Wie sieht $f(x)$ aus, wenn x um den Faktor c vergrößert wird?
   c) Gegeben ist noch eine weitere Funktion $g(x) = dx^2$. Unter welcher Bedingung für d ist $f(2)$ größer als $g(4)$?
2. Schreibe eine Gleichung für die folgende Aussage auf: „An deiner Schule gibt es sechsmal so viele Schüler wie Lehrer." Benutze S für die Anzahl der Schüler und L für die Anzahl der Lehrer.

Abbildung 6.2.: Schriftliche Aufgaben vor Beginn der Partnerarbeit verlangt.

Die zweite mathematische Aufgabe ist eine einfache mathematische Mathematisierungsaufgabe, in der die Bedeutung einer alltäglichen Aussage mit Hilfe einer Gleichung ausgedrückt werden muss (siehe Abbildung 6.2, Aufgabe 2). Die Schwierigkeit bei dieser Aufgabe besteht darin, dass die Aussage „sechsmal so viele Schüler wie Lehrer“ von der Wortreihenfolge besser mit der Struktur der Gleichung $6S = L$ übereinstimmt, als mit der korrekten Antwort $6L = S$. Die Lösungen dieser Aufgabe vermitteln einen Eindruck von der Fähigkeit der Schüler, elementare Aussagen zu mathematisieren.

Zum Abschluss der Untersuchung, nachdem die Schüler alle Aufgaben an der interaktiven Tafel bearbeitet haben, folgt noch eine letzte schriftliche Aufgabe in stiller Einzelarbeit. Diese Aufgabe ist an die erste der schriftlichen mathematischen Aufgaben angelehnt, allerdings in einen physikalischen Kontext eingebettet. Daher könnten die mathematischen Strukturen der mathematischen Aufgabe zur Beantwortung der physikalischen Aufgaben herangezogen werden. Um zu verhindern, dass die Schüler diese Analogie erkennen, wurde die Bearbeitung dieser Aufgaben zeitlich weit auseinander gelegt. Zudem wurde die Reihenfolge der Unterfragen geändert, so dass Aufgabe b) der Physikaufgabe mit Aufgabe a) der Mathematikaufgabe zusammenpasst und umgekehrt. Um eine zur Mathematikaufgabe c) analoge Physikaufgabe zu motivieren, wurde noch eine zusätzliche Unteraufgabe in die Physikaufgabe eingebaut (siehe Abbildung 6.3).

Die physikalische Situation ist der freie Fall, in dem das Weg-Zeit-Gesetz ebenfalls durch

Die Gleichung für den reibungslosen freien Fall lautet $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$.

a) Wieviel mal größer ist die gefallene Strecke, wenn man k-mal länger fällt?

b) Wie lässt sich die gefallene Strecke berechnen, wenn man n Sekunden länger fällt?

c) Auf anderen Planeten ist die Fallzeit eine andere als auf der Erde. Wie müsste dort die Formel zur Beschreibung des freien Falles aussehen?

d) Auf der Erde fällt man innerhalb von 2 Sekunden eine Strecke von ungefähr 20 Metern. Erörtere - wenn möglich anhand deines Ergebnisses aus a) - unter welcher Bedingung man auf einem anderen Planeten innerhalb von 4 Sekunden eine kürzere Strecke fällt.

Abbildung 6.3.: Schriftliche Aufgabe nach Ende der Partnerarbeit eine quadratische Gleichung beschrieben wird. Die Frage nach einer Änderung der Funktionsvariablen — in diesem Fall t — lässt sich in den physikalischen Kontext einer längeren Fallzeit einbetten. Die Bedingung für einen anderen Vorfaktor lässt sich in diesem Kontext durch einen anderen Ortsfaktor auf einem anderen Planeten kontextualisieren.

Bei diesen physikalisch-mathematischen Fragen werden ähnliche mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten wie bei der mathematischen Aufgabe benötigt, allerdings sind alle Fragen in einen physikalischen Kontext eingebettet, so dass zusätzlich ein Transfer erfordert wird. Auf der anderen Seite sind die physikalischen Aufgaben in einen Kontext eingebunden und daher realitätsnäher und nicht so abstrakt wie die rein mathematischen.

Das Ziel dieser Aufgabe ist zum einen, zusätzliche Erkenntnisse zu den Fähigkeiten der Schüler zu bekommen, mit mathematischen Strukturen im physikalischen Kontext umzugehen. Zum anderen ist ein Vergleich zu der mathematischen Aufgabe möglich, so dass die besondere Schwierigkeit des physikalischen Kontextes besser eingeschätzt werden kann.

6.3.3. Standardaufgaben an der interaktiven Tafel

Zwei weitere Aufgaben, die ebenfalls in Partnerarbeit an der interaktiven Tafel bearbeitet wurden, haben die Bearbeitung der vier konzeptuell-physikalischen Aufgaben eingerahmt. Diese Aufgaben orientieren sich an den Standardaufgaben aus Schulbüchern, wie in Kapitel 5.2 analysiert. Als erste Aufgabe kam die Aufgabe „Straßenüberquerung“ (siehe Abbildung 6.4 und Kapitel 5.3) zum Einsatz. Sie diente als Einstieg und „Aufwärmphase“ bei der Partnerarbeit an der interaktiven Tafel sowie zur Untersuchung der Auswirkungen des abgeänderten Aufgabenformats auf die Lösungsstrategien der Schüler. Aus diesen Gründen wurde keine Stillarbeit vor der gemeinsamen Bearbeitung gewährt, so dass die Bearbeitung der Aufgabe direkt an der interaktiven Tafel begann und gleich bei den ersten Gedanken eine Diskussion entstehen konnte.

Die Aufgabenstellung ist an eine Schulbuchaufgabe angelehnt, allerdings in eine natürliche Situation eingebettet und ohne Zahlenwerte gestellt. Wie in Kapitel 5.3 erläutert, ist diese Modifizierung aus den Kriterien für eine verbesserte Aufgabenkultur entwickelt worden. Durch die Arbeit mit dieser Aufgabe können die Schüler zur Diskussion angeregt und mit der Arbeitsatmosphäre vertraut gemacht werden. Durch das offenere Aufgabenformat ohne Zahlenwerte werden sie bereits auf einen anderen Umgang mit

Straßenüberquerung

Ihr wollt eine zweispurige Landstraße (eine Fahrspur in jede Richtung) in normalem Schritttempo überqueren. Wie weit müssen die fahrenden Autos, die von links kommen, und wie weit müssen die fahrenden Autos, die von rechts kommen, mindestens von euch entfernt sein, um ein gefahrloses Überqueren der Straße zu ermöglichen?

Abbildung 6.4.: Aufgabe „Straßenüberquerung“ als Schulbuchaufgabe mit natürlicher Aufgabenstellung und ohne Zahlenwerte (siehe auch Kapitel 5.3, Seite 84).

der Mathematik eingestimmt, als sie es aus der Schule gewohnt sein dürften.

Die Auswertung der Lösungen der Schülergruppen lässt zudem Rückschlüsse auf Vorteile und eventuelle Schwierigkeiten mit dem Format der natürlichen Aufgabenstellung ohne Zahlenwerte zu. Da diese Analyse jedoch nicht im Fokus dieser Studie steht, wird die Auswertung auf den schriftlichen Aufzeichnungen an der interaktiven Tafel basieren. Die Videos dienen als Hintergrundmaterial, das bei eventuellen Unklarheiten zur Explikation herangezogen werden kann.

Die zweite Aufgabe, die die konzeptuell-physikalischen Aufgaben einrahmt, ist eine Standardaufgabe aus einem Schulbuch, die als letzte Aufgabe an der interaktiven Tafel von den Schülern bearbeitet werden sollte[1] (siehe Abbildung 6.5, Aufgabenteil a). Hauptsächliches Ziel dieser Aufgabe war zu überprüfen, ob die eingeladenen Schüler bei einem Standardformat nach den bereits diskutierten Mustern, wie zum Beispiel dem „Plug and Chug“, vorgehen. Aus diesem Grund wurde bei dieser Aufgabe ebenfalls keine Stillarbeit gewährt, sondern direkt mit der Partnerarbeit an der Tafel gestartet.

Als kleine Ergänzung wurde die Schulbuchaufgabe um einen zweiten Aufgabenteil erweitert (siehe Aufgabenteil b) in Abbildung 6.5). Die Originalaufgabe fragt nach der Geschwindigkeit eines ICE nach drei Minuten — bei gegebener Strecke und konstanter Beschleunigung. Zur Lösung müssen die Schüler zuerst den Wert der Beschleunigung aus der Formel $s = at^2/2$ berechnen, um anschließend die Geschwindigkeit mittels der Formel $v = at$ berechnen zu können. Es ist anzunehmen, dass die Schüler in der Regel — wenn sie überhaupt in der Lage sind, die Aufgabe zu lösen — zuerst einen Zahlenwert für die Beschleunigung ausrechnen und diesen dann in die zweite Formel einsetzen.

Es ist allerdings auch möglich, das Einsetzen der Beschleunigung aus der ersten in die

1 Bei den ersten vier Gruppen wurde diese Aufgabe schon direkt nach der Aufgabe „Straßenüberquerung“ als insgesamt zweite Aufgabe bearbeitet. Da diese Aufgabe jedoch am unwichtigsten für die gesamte Untersuchung ist, wurde sie aus Zeitgründen ans Ende der Bearbeitung geschoben.

ICE

Ein ICE fährt mit konstanter Beschleunigung an und hat nach drei Minuten eine Strecke von 6,5 Kilometern zurückgelegt.

a) Welche Geschwindigkeit hat er nach diesen drei Minuten? Gebt sie auch in $\frac{km}{h}$ an.

b) Versucht euren Lösungsweg in a) zu verallgemeinern, indem ihr eine Gleichung aufstellt, mit der ihr die Geschwindigkeit des ICE in Abhängigkeit der gegebenen Werte (Strecke und Zeit) berechnen könnt. Überprüft eure Gleichung.

Abbildung 6.5.: Aufgabe „ICE“ aus einem Schulbuch (Schroedel, 2006, S. 97, Aufgabe 4). Zusätzlich wurde der Aufgabenteil b) zugefügt, um die Abstraktion des Lösungsweges zu fordern.

zweite Formel bereits mit den Symbolen — also ohne Zahlenwerte — durchzuführen. Man erhält die Gleichung $v = 2s/t$, mit der sich die Geschwindigkeit direkt aus den gegebenen Werten berechnen lässt. Die Berechnung ist dadurch vereinfacht, allerdings muss die Formel vorher unter Verwendung der Symbole hergeleitet werden. Um zu überprüfen, ob die Schüler auch zu diesem Schritt in der Lage sind, wurde eine zweite Frage als zusätzlicher Aufgabenteil hinzugefügt.

7. Auswertung der Kontrollparameter und Standardaufgaben

Bevor in den nächsten Kapiteln die beiden Forschungsfragen untersucht werden, erfolgt die Auswertung der Kontrollparameter — wie z.B. Alter, Noten, Selbstkonzept — und der Standardaufgaben — die drei schriftlichen Aufgaben, die Aufgabe ICE sowie die Aufgabe zur Straßenüberquerung. Damit wird zum einen eine Beschreibung der Stichprobe ermöglicht, die eine Einschätzung der Bedingungen der späteren empirischen Ergebnisse ermöglicht und Rückschlüsse auf deren Gültigkeitsbereich zulässt. Zudem liefern die Auswertungen der Standardaufgaben erste Erkenntnisse zu mathematisch-physikalischen Fähigkeiten und Strategien. Die Aufgabe zur Straßenüberquerung geht noch darüber hinaus und zeigt auf, wie die Schüler mit dem Aufgabenformat der natürlichen Aufgabenstellung ohne Zahlenwerte umgehen und welche Probleme dabei auftreten.

7.1. Beschreibung der Stichprobe

Insgesamt haben 30 Schüler der Klassenstufen 9 und 10 von vier verschiedenen Dresdener Gymnasien an der Studie teilgenommen, wobei der Untersuchungszeitpunkt am Ende des Schuljahres lag. Es gab 18 Schüler der Klassenstufe 9, wobei 10 Mädchen und 8 Jungen in sieben gleichgeschlechtlichen und zwei gemischten Paaren die Aufgaben bearbeitet haben. Demnach gab es 12 Schüler der Klassenstufe 10 — sieben Jungen und fünf Mädchen —, bei denen nur ein Paar aus Junge und Mädchen bestand. Das Alter der Schüler variierte zwischen 14 und 17 Jahren, der Hauptteil der Schüler war jedoch 15 oder 16 Jahre alt.

7.1.1. Datenmaterial

Die Zeit, die die 15 Gruppen für die gesamte Teilnahme benötigten, variierte zwischen zwei und zweieinhalb Stunden. Davon entfielen ungefähr zwanzig bis fünfundzwanzig Minuten auf die schriftlichen Aufgaben und die weiteren Fragen. Es haben fast alle Gruppen alle Aufgaben an der interaktiven Tafel bearbeitet. Aufgrund von Zeitproblemen hat eine Gruppe die Aufgabe zum Luftwiderstand nicht bearbeitet, zwei Gruppen nicht die Aufgabe zum ICE und eine Gruppe musste sowohl die Aufgabe zum ICE als auch die Aufgabe zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung auslassen. Bei einer weiteren Gruppe hat die Aufnahme des Desktopvideos bei der Aufgabe zur Straßenüberquerung aufgrund eines Computerfehlers nicht funktioniert, die schriftlichen Aufzeichnungen sind jedoch erhalten. Der gleiche Fehler ereignete sich bei einem Video zur Aufgabe Luftwiderstand.

Eine weitere leichte Reduzierung des auswertbaren Datenmaterials ist einer schlechten Tonqualität bei der Aufnahme geschuldet, so dass eine Transkription nicht möglich ist. Dies betrifft allerdings nur eine Gruppe zur Aufgabe „Luftwiderstand“. Die Aufgabe „Straßenüberquerung“ wurde nicht transkribiert, da hier die Auswertung auf den schriftlichen Aufzeichnungen an der interaktiven Tafel basiert. Die Videos dienen als Zusatzmaterial zur Explikation eventueller Unklarheiten. Insgesamt wurden 14,5 Stunden Videomaterial transkribiert. Davon entfallen ungefähr

- 2,25 Stunden von 15 Gruppen auf die Aufgabe „Zwei Massen"
- 4,25 Stunden von 15 Gruppen auf die Aufgabe „Phantasie-Universum"
- 2,5 Stunden von 14 Gruppen auf die Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung"
- 2,5 Stunden von 12 Gruppen auf die Aufgabe „Luftwiderstand"
- 3 Stunden von 12 Gruppen auf die Aufgabe „ICE"

Aus den Transkripten bzw. Videos lässt sich die durchschnittliche Bearbeitungsdauer in Partnerarbeit für die verschiedenen Aufgaben ablesen. Es ergeben sich ungefähr

1. 19 Minuten für die Aufgabe „Straßenüberquerung“
2. 17 Minuten für die Aufgabe „Phantasie-Universum"
3. 15 Minuten für die Aufgabe „ICE"
4. 13 Minuten für die Aufgabe „Luftwiderstand"
5. 11 Minuten für die Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung"

6. 9 Minuten für die Aufgabe „Zwei Massen"

Es zeigt sich, dass für die konzeptuell-mathematischen Aufgaben durchschnittlich relativ wenig Zeit für die Bearbeitung beansprucht wurde. Die Aufgabe „Phantasie-Universum“ scheint von diesen vier Aufgaben die zeitintensivste zu sein. Auffällig ist, dass die beiden Rechenaufgaben „ICE“ und „Straßenüberquerung“ durchschnittlich mehr Zeit als drei der vier konzeptuell-mathematischen Aufgaben benötigen.

7.1.2. Noten und Selbstkonzept

Die Schulnoten der Fächer Physik, Mathematik und Deutsch wurden für die zurückliegenden drei Zeugnisse erfragt. In diesem Fall betrifft das die Halbjahreszeugnisse 2009 und 2010 sowie das Abschlusszeugnis 2009. Die Noten wurden jeweils über alle Zeugnisse gemittelt, die Verteilung ist in Abbildung 7.1 zu sehen. Dabei ist zu beachten, dass zwei Schüler teilweise nur die Noten von zwei Zeugnissen angegeben haben, so dass

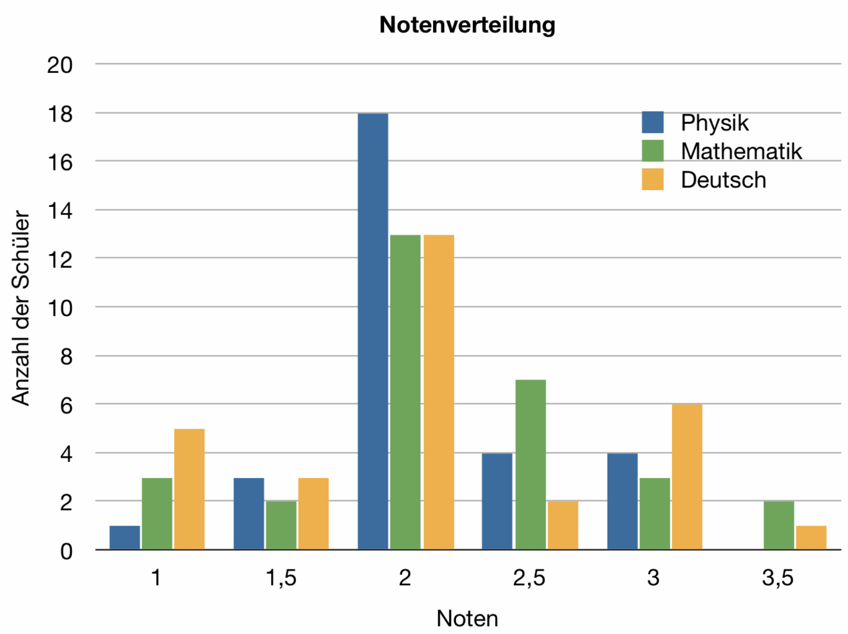


Abbildung 7.1.: Verteilung der Schulnoten in den Fächern Physik, Mathematik und Deutsch nach Auskunft der Schüler, gemittelt über die letzten drei Zeugnisse.

hier nur über zwei Noten gemittelt werden konnte. Außerdem wurden zusätzliche Abstufungen der Noten durch „Plus“ oder „Minus“ nicht berücksichtigt, wenn sie von den Schülern angegeben wurden.

Die Notenverteilung zeigt für alle Fächer eine deutliche Häufung bei der Note zwei. Dabei ist die Verteilung so zu lesen, dass jeweils die untere Notengrenze an der x-Achse aufgetragen ist. Der erste Balken umfasst also die Noten von 1 bis <1,5 und der zweite Balken von 1,5 bis <2. Die größte Spreizung der Noten ist bei Mathematik und Deutsch vorhanden, mit mehr sehr guten und nicht so guten Noten als in Physik. Es lässt sich jedoch für alle Fächer sagen, dass hauptsächlich Schüler an der Studie teilgenommen haben, deren Leistungen im guten Durchschnitt liegen, wobei auch einige sehr gute und einige schwächere Schüler vertreten waren.

Unter dem Blickwinkel der Notenverteilung lässt sich die Annahme vertreten, dass die Ergebnisse der Studie ein breites Spektrum möglicher Vorstellungen und Schwierigkeiten widerspiegeln. Die meisten Erkenntnisse werden jedoch eher charakteristisch für den guten Durchschnitt der Schüler sein. Allerdings ist auch nicht zu befürchten, dass nur die Vorstellungen der besten Schüler in die Ergebnisse einfließen und daher für den Großteil der Schüler nicht relevant sind.

Die Ergebnisse zum Selbstkonzept bestätigen die durch die Notenverteilung gewonnene Einschätzung. Die Streuung ist hier geringer als bei den Noten. Die meisten Schüler schätzen sich im Schnitt mit „gut“ ein, einige wenige zwischen „sehr gut“ und „gut“ oder „gut“ und „mittel“. Die Verteilung ist in Abbildung 7.2 gezeigt.

7.1.3. Einschätzungen zur Rolle von Formeln in der Physik

Auf die Frage nach der Rolle von Formeln in der Physik haben 27 der 30 Schüler geantwortet. Die Antworten wurden in einer kurzen qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet. Dazu wurden die Antworten in einem ersten Schritt paraphrasiert und bei deutlichen Übereinstimmungen bereits gruppiert. Anschließend wurde die Gruppierung überarbeitet und aus den Paraphrasierungen Kategorien gebildet. Dabei ist es möglich, dass die Antwort eines Schülers mehrere Aspekte enthält und dementsprechend in mehreren Kategorien auftritt.

Die meisten Aussagen der Schüler lassen sich in vier Kategorien einteilen (siehe Abbildung 7.3). Der am häufigsten genannte Aspekt betrifft das Berechnen von Werten und Größen. Diese Rolle von Formeln wurde zwölf Mal genannt. Ein ähnlich technischer

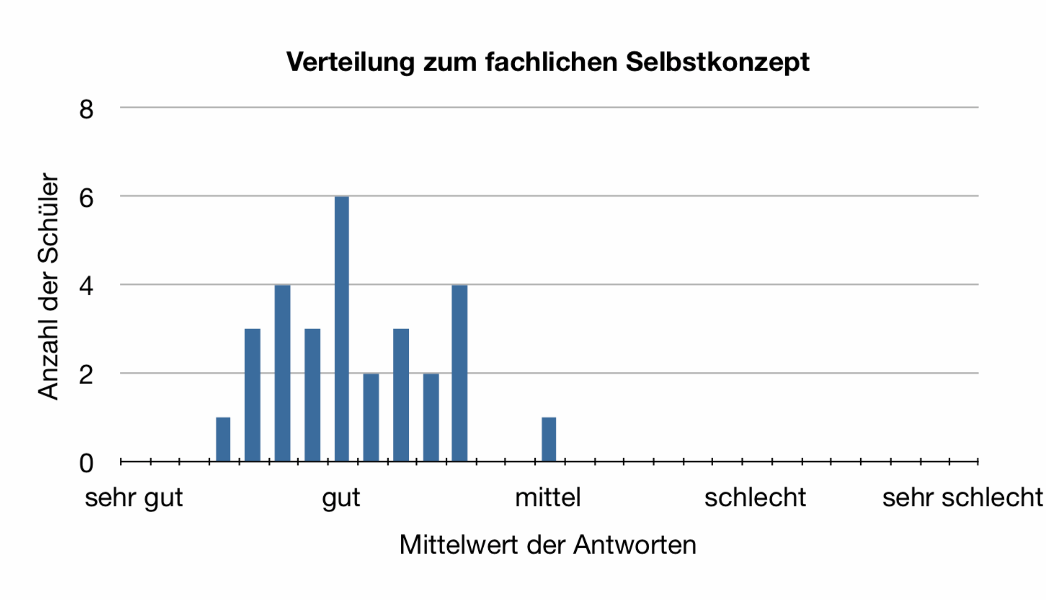


Abbildung 7.2.: Verteilung der Ergebnisse des Fragebogens zum fachlichen Selbstkonzept. Der Fragebogen wurde von 29 Schülern ausgefüllt. Auf der x-Achse ist der Durchschnittswert der Antworten auf der Skala von sehr gut [1] bis sehr schlecht [5] angegeben.

Blick auf die Rolle von Formeln trat in sieben Aussagen hervor, in der Formeln eine sehr pragmatische Funktion zugeschrieben wird. Sie werden zum Lösen von Aufgaben, Vereinfachen des Lösungsweges oder zum Finden einer exakten Lösung angesehen.

Zwei weitere häufige Kategorien mit ähnlichem Inhalt betreffen zum einen das Vereinfachen oder Zusammenfassen von physikalischen Gesetzen, zum anderen das Beschreiben und Darstellen von Zusammenhängen oder Beziehungen. Die erstgenannte Kategorie konnte sieben Mal identifiziert werden, die zweitgenannte acht Mal, wobei fünf davon im Zusammenhang mit der Kategorie „Berechnung“ auftreten. Es scheint hier so, als ob das Beschreiben von Zusammenhängen als Mittel zum Zweck der Berechnung angesehen wird.

Abgesehen von diesen vier Kategorien traten weitere vereinzelte Aspekte auf. So wurde zwei Mal die Rolle von Formeln im Verallgemeinern von Gesetzen gesehen, drei Mal wurde den Formeln die Rolle einer Art Grundgerüst und Systematik für die Physik zugeschrieben. Zwei Mal wurde die Rolle von Formeln im Beschreiben oder Modellieren gesehen, zwei Mal als veständnisfördernd. Unter diesen vereinzelten Aspekten lassen sich durchaus Einstellungen zur Rolle von Formeln wiederfinden, die mit strukturellen Fähigkeiten einhergehen. Die vier häufig auftretenden Kategorien deuten jedoch auf ein

Abbildung 7.3.: Die vier häufigsten Kategorien zu der Einschätzung der Rolle von Formeln in der Physik. Zudem ist die Häufigkeit des Auftretens zu jeder Kategorie angegeben.

eher technisches oder oberflächliches Bild von der Rolle von Formeln in der Physik hin.

Ohne diese Auswertung überzustrapazieren, deuten die Antworten der Schüler in eine ähnliche Richtung wie es die Ergebnisse der Studie von Krey und Mikelskis (2009) nahelegen (siehe Kapitel 2.6). Die Rolle der Mathematik bzw. der Formeln zeigt sich in einem oberflächlichen Bild der Schüler, das auf technische Aspekte fokussiert ist. Trotzdem sind bei einigen Schülern durchaus positive Einstellungen zu beobachten, die sich der Natur der Physik annähern.

7.2. Schriftliche Aufgaben

Die schriftlichen Aufgaben unterteilen sich in zwei mathematische Aufgaben und eine physikalisch-mathematische Aufgabe, die ähnliche mathematische Strukturen wie die erste mathematische Aufgabe aufweist. Die beiden mathematischen Aufgaben wurden vor der Partnerarbeit an der interaktiven Tafel bearbeitet, die physikalisch-mathematische Aufgabe stellte jeweils den Abschluss der Datenerhebung dar. Das Ziel dieser Aufgaben ist, einen ersten Eindruck der Fähigkeiten der Schüler zu erhalten, relativ einfache Mathematisierungen sowohl im mathematischen als auch physikalischen Kontext vorzunehmen. Zudem können Hinweise auf den Einfluss des physikalischen Kontextes auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe durch den Vergleich der physikalisch-mathematischen Aufgabe mit der ersten mathematischen Aufgabe erhalten werden. Im Folgenden werden die Ergebnisse der Auswertung der drei schriftlichen Aufgaben erläutert. Aufgrund des geringeren Schwierigkeitsniveaus der zweiten mathematischen Aufgabe im Vergleich zur ersten sowie des Zusammenhangs zwischen der ersten mathematischen und der physikalisch-mathematischen Aufgabe wird mit der Auswertung der zweiten mathematischen Aufgabe begonnen.

7.2.1. 2. Mathematische Aufgabe

Die zweite schriftliche mathematische Aufgabe lautet (vergleiche Kapitel 6.3.2): Schreibe eine Gleichung für die folgende Aussage auf: „An deiner Schule gibt es sechsmal so viele Schüler wie Lehrer.“ Benutze S für die Anzahl der Schüler und L für die Anzahl der Lehrer.

Zur Auswertung dieser Aufgabe wurden die Lösungen der Schüler dahingehend kontrolliert, ob die richtige Lösung $6L = S$ hingeschrieben wurde. Eventuell zusätzlich geschriebene Erläuterungen wurden nicht bewertet. Nach diesen Kriterien haben 27 der 30 Schüler die Aufgabe korrekt beantwortet. Diese relativ einfache Mathematisierung bereitete den meisten Schülern also keine Schwierigkeiten.

Die drei falschen Antworten sind „$6S = L$“, „$6S + L = Gesamt$“ und „$6xS = xL$“. Bei allen diesen Lösungen zeigt sich die angesprochene direkte Übersetzung der Wortreihenfolge in die mathematische Struktur. Dadurch erhält das Gleichheitszeichen die Bedeutung „soviel… wie“ und S und L stehen nicht für die Mengen der Schüler beziehungsweise Lehrer. Die passenden mathematischen Grundvorstellungen scheinen nicht aktiviert worden zu sein.

Bei der Antwort $6xS = xL$ zeigt sich zudem eine weitere Schwierigkeit. Allerdings ist nicht mit Sicherheit festzustellen, ob das x vielleicht auch die Bedeutung von $\times$ („mal“) haben soll. Wenn es jedoch als x interpretiert wird, könnte dies auf den Versuch des Schülers hindeuten, eine unbekannte Variable, die im Mathematikunterricht meist mit

x bezeichnet wird, in die Gleichung einzubringen.

Insgesamt zeigt sich die zweite mathematische Aufgabe jedoch als unproblematisch. Das Übersetzen der in der Aufgabe gegebenen Aussage in eine mathematische Gleichung wurde von fast allen Schülern erfolgreich gelöst. Die Bedeutung einer Alltagsaussage — sechsmal so viele Schüler wie Lehrer — konnte mit der passenden mathematischen Struktur — der Gleichung $6L = S$ — verbunden werden. Daher scheinen die meisten Schüler die Grundvorstellung (bzw. symbolische Form) des Gleichheitszeichens als Ausdruck für gleiche Mengen verstanden zu haben.

7.2.2. 1. Mathematische Aufgabe

Die erste schriftliche mathematische Aufgabe lautet (vergleiche Kapitel 6.3.2): Betrachte die Funktion $f(x) = ax^2$.

a) Wie sieht $f(x)$ aus, wenn x um b zunimmt?

b) Wie sieht $f(x)$ aus, wenn x um den Faktor c vergrößert wird?

c) Gegeben ist noch eine weitere Funktion $g(x) = dx^2$. Unter welcher Bedingung für d ist $f(2)$ größer als $g(4)$?

Zur Auswertung wurden die aufgeschriebenen Lösungen auf fachliche Richtigkeit überprüft. Das bedeutet für die ersten beiden Aufgaben, dass die Bedeutung „um b zunehmen“ bzw. „um den Faktor c vergrößern“ korrekt auf die mathematische Struktur der Funktion übertragen werden muss. Bei einer algebraischen Lösung wäre demnach $f(x) = a(x+b)^2$ bzw. $f(x) = a(cx)^2$ die korrekte Lösung, bei einer graphischen oder ausformuliert qualitativen Lösung das Verschieben des Funktionsgraphen entlang der x-Achse bzw. das Strecken oder Stauchen des Graphen.

Wenn diese Lösungen von den Schülern aufgeschrieben wurden, wurde die Aufgaben als richtig bewertet. Dabei stellt das korrekte Übersetzen der Bedeutungen in die mathematische Repräsentation den Fokus der Auswertung dar. Falls ein Schüler ausgehend von der richtigen Übersetzung mit einer mathematischen Umformung weitergearbeitet hat, so wurde diese nicht in die Bewertung einbezogen. Hierbei eventuell auftretende technische Fehler sind für eine Diagnostik des Verstehens der Mathematisierung irrelevant.

Bei der dritten Teilaufgabe ist das korrekte Ergebnis $d < a/4$. Um dieses zu erhalten, muss zuerst der Vergleich beider Funktionen als $f(2) > g(4)$ mathematisiert werden um danach die Frage nach der Bedingung für d durch Ausschreiben der Funktionsterme zu beantworten: $4a > 16d$. Eigentlich müsste danach noch die Umstellung nach d erfolgen. Da hierbei jedoch wieder technische Fähigkeiten den Ausschlag für Fehler geben können und sich die Frage auch mit $4a > 16d$ als beantwortet begreifen lässt, wird bereits das Erreichen dieser Ungleichung als korrekte Lösung bewertet, unabhängig vom weiteren Vorgehen. Eine eventuell qualitativ ausformulierte Antwort, die die korrekte Lösung widerspiegelt, wird ebenfalls als korrekt eingestuft.

Unter Beachtung dieser Kriterien haben 12 Schüler die Teilaufgabe a), 10 Schüler die Teilaufgabe b) und 7 Schüler die Teilaufgabe c) korrekt gelöst. Dabei haben 4 Schüler alle Aufgabenteile korrekt gelöst, 15 Schüler haben alle Aufgabenteile fehlerhaft beantwortet. Die Aufgabe c) stellt sich als tendenziell am schwersten heraus, allerdings wurden auch die anderen beiden Aufgabenteile von weniger als der Hälfte der Schüler korrekt beantwortet. Dies deutet auf Probleme beim Umgang mit Funktionen hin, bereits einfache Mathematisierungen erweisen sich als schwierig. Die Bedeutung der in den Aufgabenstellungen gegebenen Anweisungen für die mathematische Repräsentation scheinen die meisten Schüler nicht verstanden zu haben.

Jeweils ungefähr die Hälfte der Schüler hat die ersten beiden Aufgaben qualitativ, also durch eine ausformulierte Aussage oder graphische Darstellung, beantwortet. Allerdings gibt es nur zwei richtige qualitative Lösungen zu Aufgabe a) und nur eine richtige zur zweiten Teilaufgabe. Das zeigt an, dass insbesondere das qualitative Beschreiben der Auswirkungen auf das Verhalten der Funktion Schwierigkeiten verursacht.

Insgesamt lässt sich feststellen, dass viele Schüler bereits bei diesen relativ einfachen mathematischen Aufgaben Probleme haben. Im Gegensatz zur zweiten mathematischen Aufgabe erscheint das Übersetzen der in der Aufgabenstellung gegebenen Aussagen in eine mathematische Repräsentation problematisch. Interessanterweise besteht ein Unterschied zur zweiten Aufgabe darin, dass nicht die Bedeutung einer Alltagsaussage — sechsmal so viele Schüler wie Lehrer — mathematisiert werden soll, sondern sich die Bedeutung bereits auf den mathematischen Kontext bezieht — x nimmt um b zu. Diese Mathematisierung stellt eigentlich einen kleineren Mathematisierungsschritt dar, da sie eng im mathematischen Kontext verankert ist. Allerdings operiert sie mit anscheinend komplizierteren mathematischen Strukturen — der Funktion $f(x) = ax^2$ — als die zweite mathematische Aufgabe, die nur die Gleichung $6L = S$ benötigt.

Insofern scheint bei der ersten mathematischen Aufgabe der mathematische Schwierigkeitsgrad, und nicht die Mathematisierung an sich, ausschlaggebend für die Probleme der Schüler zu sein. Das mangelnde Verständnis von Funktionen — insbesondere deren mathematische, anschauliche oder graphische Bedeutung — scheint bei den Schülern die Probleme bei der ersten mathematischen Aufgabe zu verursachen. Ein fundiertes relationales Verstehen mathematischer Funktionen lässt sich daher nicht feststellen. Es zeigen sich eher Tendenzen, die in die Gegenrichtung weisen.

7.2.3. Physikalisch-mathematische Aufgabe

Die physikalisch-mathematische Aufgabe lautet (vergleiche Kapitel 6.3.2): Die Gleichung für den reibungslosen freien Fall lautet $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$.

a) Wieviel mal größer ist die gefallene Strecke, wenn man k-mal länger fällt?

b) Wie lässt sich die gefallene Strecke berechnen, wenn man n Sekunden länger fällt?

c) Auf anderen Planeten ist die Fallzeit eine andere als auf der Erde. Wie müsste dort die Formel zur Beschreibung des freien Falles aussehen?

d) Auf der Erde fällt man innerhalb von 2 Sekunden eine Strecke von ungefähr 20 Metern. Erörtere - wenn möglich anhand deines Ergebnisses aus a) - unter welcher Bedingung man auf einem anderen Planeten innerhalb von 4 Sekunden eine kürzere Strecke fällt.

Die erste Teilaufgabe wurde dahingehend bewertet, ob „k^2-mal“ als Antwort gegeben wurde. In diesem Fall können zwar auch technische Fehler zu einer falschen Antwort führen, wenn beispielsweise falsch ausgeklammert wird, allerdings lässt sich dies nicht immer nachvollziehen, so dass es nicht als Kriterium für die Bewertung herangezogen werden kann. Die Anzahl der Antworten, die „k-mal“ als Lösung angeben, lässt jedoch vermuten, bei wie vielen Schüler der Fehler in dieser technischen Unachtsamkeit lag.

Die zweite Teilaufgabe wird analog zur Teilaufgabe a) bei der ersten mathematischen Aufgabe ausgewertet. Die korrekte Lösung ist $s = g/2 \cdot (t + n)^2$ und es ist ausschlaggebend, ob diese Gleichung in der Lösung auftaucht, unabhängig von eventuell weiteren Manipulationen. Die Lösungen zur dritten Teilaufgabe werden danach bewertet, ob erkannt wird, dass der Ortsfaktor auf dem anderen Planeten ein anderer ist. Es ist dabei irrelevant, ob dies in einer Formel oder einer ausformulierten Antwort zum Ausdruck kommt.

Teilaufgabe d) kann wieder analog zu Teilaufgabe c) der ersten mathematischen Aufgabe ausgewertet werden. Hier muss ebenfalls die Ungleichung $s_{Erde}(2\text{s}) > s_{Planet}(4\text{s})$

erkannt und dann ausgeschrieben werden, wobei g_{Planet} die einzige Unbekannte in diesem Fall ist: $20\text{m} > g_{Planet}(4\text{s})^2/2$. Wie oben bei der mathematischen Aufgabe erläutert, wird diese Ungleichung bereits als korrekte Lösung eingeordnet, unabhängig von weiteren Umformungen.

Eine weitere Möglichkeit zur Lösung dieser vierten Teilaufgabe ist in dem Nebensatz angedeutet, der das Ergebnis aus der Teilaufgabe a) zur Lösung heranzieht. Dies würde bedeuten, dass die Schüler erkennen, dass die gefallene Strecke bei vier im Vergleich zu zwei Sekunden Fallzeit um den Faktor $2^2 = 4$ größer wird. Dies muss der Ortsfaktor des anderen Planeten ausgleichen, weshalb er höchstens ein Viertel so groß wie der auf der Erde sein darf. Allerdings hat keiner der Schüler diese Argumentation benutzt, so dass sie bei der Auswertung keine Rolle spielt.

Unter diesen Gesichtspunkten der Auswertung haben 10 Schüler die Teilaufgabe a), je 17 Schüler die Teilaufgaben b) und c) und 6 Schüler die Teilaufgabe d) korrekt gelöst, was erwartungsgemäß die letzte Teilaufgabe als schwerste ausweist. Nur ein Schüler hat alle Aufgabenteile korrekt gelöst, 7 Schüler haben alle Aufgabenteile fehlerhaft beantwortet[1]. Bei der ersten Teilaufgabe fällt zudem auf, dass weitere 10 Schüler die Antwort „k-mal“ gegeben haben. Wie oben bereits erwähnt, ist es plausibel anzunehmen, dass diese Antwort meistens aufgrund der Unachtsamkeit oder des technischen Fehlers entstanden ist, $(kt)^2$ in kt^2 umzuwandeln — bei zwei Schülern lässt sich dieser Fehler auch explizit in den Aufzeichnungen wiederfinden. Wenn man diese Annahme zugrunde legt, haben 20 Schüler kein Problem damit gehabt, „k-mal länger fallen“ in die Struktur der Gleichung zu übersetzen.

Zu der letzten Teilaufgabe ist zu erwähnen, dass zwei der sechs als korrekt eingestuften Lösungen kleine Fehler enthalten, die jedoch als unerheblich für die Auswertung betrachtet werden. In einer Lösung ist in der korrekten Ungleichung $20\text{m} > g_{Planet}(4\text{s})^2/2$ die 20 durchgestrichen und durch eine 40 ersetzt. Zudem steht nach dem „>“ noch zusätzlich „$s =$“. Diese Fehler ändern jedoch nichts daran, dass prinzipiell die physikalische Fragestellung richtig mathematisiert wurde. Bei einer anderen Lösung wurde nicht mit einer Ungleichung, sondern mit einer Gleichung gearbeitet. Dies kann als Bestimmung des Grenzwertes des Ortsfaktors des anderen Planeten gemeint sein, weshalb diese Lösung ebenfalls als korrekt eingestuft wurde.

1 Ohne Beachtung der Aufgabe c), um einen Vergleich zur ersten mathematischen Aufgabe herstellen zu können: 3 Schüler alles korrekt, 8 Schüler alles fehlerhaft.

Im Vergleich zu der letzten Teilaufgabe der ersten mathematischen Aufgabe — die die gleiche mathematische Struktur ohne den physikalischen Kontext aufweist — lässt sich kein Unterschied feststellen. Die mathematische Aufgabe wurde von 7 Schülern korrekt gelöst, die physikalische von 6 Schülern. Interessanterweise haben 3 Schüler beide Aufgaben richtig gelöst, 4 Schüler nur die mathematische und 3 Schüler nur die physikalische. Im Hinblick auf die Bewertung des physikalischen Kontextes als erschwerend oder erleichternd lassen sich hieraus also keine Tendenzen erkennen.

Bei den ersten beiden Teilaufgaben, die von der mathematischen Struktur ebenfalls analog zu den ersten beiden mathematischen Teilaufgaben sind, lassen sich auch keine Rückschlüsse für die Einschätzung des physikalischen Kontextes ziehen. Zum einen sind die Unterschiede der Anzahl der korrekten Lösungen nicht besonders groß, zum anderen wurde die mathematische Aufgabe durch qualitative Antworten zum Verhalten der Funktion erschwert, die bei den physikalischen Aufgaben nicht vorhanden waren. Insofern darf auch die Tendenz, dass 17 Schüler die physikalische Teilaufgabe b), aber nur 12 Schüler die entsprechende mathematische Teilaufgabe a) gelöst haben, nicht als erleichternde Eigenschaft des physikalischen Kontextes gewertet werden[2].

Insgesamt zeigen die Ergebnisse dieser physikalischen Aufgabe in eine ähnliche Richtung wie die der ersten mathematischen, weshalb der speziell physikalische Kontext kein ausschlaggebender Faktor zu sein scheint. Viele Schüler haben bereits bei diesen relativ einfachen Übersetzungen von physikalischer Bedeutung in die mathematische Repräsentation Probleme. Das Verstehen des Zusammenhangs von Physik und Mathematik bereitet teilweise große Schwierigkeiten, selbst auf einer elementaren Ebene. Dabei ist zu beachten, dass auch bei der physikalischen Aufgabe die mathematische Struktur einer Funktion vorliegt, so dass hier ebenfalls das bei der ersten mathematischen Aufgabe gezeigte mangelnde Verständnis der Bedeutung von Funktionen das entscheidende Problem sein kann.

7.3. Aufgabe ICE

Die Aufgabe ICE dient zur Überprüfung, ob die Strategien der teilnehmenden Schüler bei einer Standardaufgabe aus einem Schulbuch nach ähnlichen Mustern ablaufen, wie es die „epistemic games“ von Tuminaro und Redish (2007) bei Studenten beschreiben

2 Ebenso verhält es sich mit dem Ergebnis, dass 15 Schüler alle mathematischen Teilaufgaben fehlerhaft beantwortet haben, dagegen nur 8 Schüler alle vergleichbaren physikalischen Teilaufgaben.

(siehe Kapitel 2.3). Zudem wurde ein zweiter Aufgabenteil angefügt, der eine Abstraktion des Lösungsweges erfordert. Damit ergibt sich folgende Aufgabe (vgl. Kapitel 6.3.3): Ein ICE fährt mit konstanter Beschleunigung an und hat nach drei Minuten eine Strecke von 6,5 Kilometern zurückgelegt.

a) Welche Geschwindigkeit hat er nach diesen drei Minuten? Gebt sie auch in $\frac{km}{h}$ an.

b) Versucht euren Lösungsweg in a) zu verallgemeinern, indem ihr eine Gleichung aufstellt, mit der ihr die Geschwindigkeit des ICE in Abhängigkeit der gegebenen Werte (Strecke und Zeit) berechnen könnt. Überprüft eure Gleichung.

Aus den schriftlichen Aufzeichnungen an der interaktiven Tafel lässt sich ersehen, dass nur 1 von 12 Gruppen sowohl die erste als auch die zweite Teilaufgabe korrekt beantwortet hat. Korrekt bedeutet für den ersten Teil, dass mit den richtigen Formeln gerechnet wurde, im zweiten Teil muss die richtige Formel als Ergebnis erhalten werden. Fünf weitere Gruppen haben bei der ersten Teilaufgabe einen richtigen Ansatz gewählt, indem sie die Beschleunigung betrachtet haben. Allerdings sind im Lösungsweg Fehler in der Formel, der Umstellung oder der Rechnung enthalten. Die restlichen sechs Gruppen haben zur Lösung die Formel $v = s/t$ gewählt.

Bezüglich der zweiten Teilaufgabe hat nur eine weitere Gruppe einen richtigen Ansatz gewählt. Allerdings war ein Fehler in einer der Formeln, so dass das Endergebnis nicht korrekt war. Von den restlichen 10 Gruppen haben vier die Formel $v = s/t$ als Lösung betrachtet, drei Gruppen haben keine Lösung hingeschrieben und bei weiteren drei Gruppen ist kein klarer Lösungsweg ersichtlich. Der zweite Aufgabenteil war demnach zu schwer. Insbesondere für die Hälfte der Gruppen, die bereits die erste Teilaufgabe mit der Formel $v = s/t$ gelöst haben, kann die zweite Fragestellung auch keinen Sinn ergeben, da bereits eine Formel für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Strecke und der Zeit vorhanden ist.

Unabhängig von der zu hohen Schwierigkeit der zweiten Teilaufgabe fällt auf, dass bereits der erste Aufgabenteil eine hohe Schwierigkeit für die Schüler dargestellt hat. Nur die Hälfte der Gruppen hat einen richtigen Ansatz gewählt, wovon nur einer korrekt ausgearbeitet wurde. Die andere Hälfte hat mit der Formel der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit für eine beschleunigte Bewegung berechnet. Dieser Fehler lässt bereits vermuten, dass die Schüler vielfach nach der Strategie des „Plug and Chug" — Einsetzen und Losrechnen — vorgegangen sind. Zudem zeigt sich, dass nur 2 der 12 Gruppen eine Skizze der physikalischen Situation angefertigt haben, ganz im Gegensatz zu dem Vorgehen bei der Aufgabe „Straßenüberquerung" (siehe das folgende

Kapitel 7.4).

Im Rahmen einer wissenschaftlichen Hausarbeit zum Abschluss des ersten Staatsexamens wurde von einem Studenten eine genauere Analyse der Strategien der Schüler vorgenommen (Ullmann, 2011). Darin wurden Transkripte der Videos anhand des Kategoriensystems der „epistemic games“ von Tuminaro und Redish (2007) analysiert. Die Auswertung bestätigt die Vermutung, dass die Strategie des „Plug and Chug“ das deutlich am häufigsten angewandte „epistemic game“ darstellt. Die wünschenswerten Vorgehensweisen — „mapping meaning to mathematics“ und „mapping mathematics to meaning“ —, bei denen die Übersetzung zwischen Mathematik und physikalischer Bedeutung im Zentrum stehen, konnten am seltensten identifiziert werden.

Zudem wurden zwei weitere Strategien klassifiziert, die sich nicht einem „eipistemic game“ zuordnen lassen. Die eine Strategie kann als „Lösen durch Einheiten“, die andere als „Versuch und Irrtum“ bezeichnet werden. Bei beiden Vorgehensweisen steht ein schematischer und kalkülorientierter Ansatz im Mittelpunkt, so dass sie vom Umgang mit der Mathematik Ähnlichkeiten mit dem „Plug and Chug“ aufweisen. Diese beiden neuen Strategien stellen auch die nächst häufigen Vorgehensweisen der Schüler dar.

Insgesamt zeigt sich, dass die in Kapitel 2.3 erläuterten Probleme von Schülern beim Lösen quantitativer physikalischer Probleme auch auf die Stichprobe der teilnehmenden Schüler bei dieser Studie zuzutreffen scheinen. Bei einer Standardaufgabe aus einem Schulbuch, die als Rechenaufgabe nach dem Schema „gegeben-gesucht“ aufgebaut ist, gehen die meisten Schüler sehr technisch vor. Eine bewusste Übersetzung zwischen Physik und Mathematik kann nicht beobachtet werden, strukturelle Fähigkeiten treten gegenüber den technischen Fähigkeiten in den Hintergrund.

7.4. Aufgabe Straßenüberquerung

Die Aufgabe zur Straßenüberquerung wurde in Kapitel 5.3 aus einer Schulbuchaufgabe abgeleitet, mit dem Ziel, Kriterien einer verbesserten Aufgabenkultur wirksam werden zu lassen. Dazu wurde die Aufgabenstellung so umformuliert, dass sie eine alltägliche natürliche Situation beschreibt. Zudem sind keine Zahlenwerte in der Aufgabenstellung angegeben. Damit ergibt sich die folgende Aufgabe: „Ihr wollt eine zweispurige Landstraße (eine Fahrspur in jede Richtung) in normalem Schritttempo überqueren. Wie weit müssen die fahrenden Autos, die von links kommen, und wie weit müssen die fahrenden Autos, die von rechts kommen, mindestens von euch entfernt sein, um ein gefahrloses Überqueren der Straße zu ermöglichen?“

Durch den Verzicht auf gegebene Zahlenwerte und die natürliche Situationsbeschreibung wird die Aufgabe geöffnet, so dass individuelle Lösungen zugelassen werden. Die Schüler sind frei in der Wahl der Zahlenwerte und der Bewertung des „gefahrlosen Überquerens“. Zudem muss die nötige Formel aufgrund der physikalischen Situation ausgewählt werden, da eine Auswahl anhand vorgegebener Zahlenwerte nicht möglich ist.

Offen ist, ob die Schüler mit der neuen Situation ohne gegebene Zahlenwerte umgehen können und wie stark gewohnte Routinen und Schemata auch bei diesem Aufgabenformat zur Anwendung kommen. Um einige Aspekte dieser Problematik zu beleuchten, wird eine Auswertung der schriftlichen Aufzeichnungen der Schülerpaare zu dieser Aufgabe durchgeführt. Die Videoaufnahmen dienen dabei nur zur eventuell notwendigen Explikation von Unklarheiten. Eine detaillierte Analyse anhand von Transkripten erfolgt nicht, da es sich bei dieser Aufgabe nur um eine Idee zur Verbesserung von Schulbuchaufgaben handelt, der Fokus dieser Studie aber auf den konzeptuell-mathematischen Physikaufgaben liegt.

Trotzdem liefert die Analyse der schriftlichen Aufzeichnungen einige interessante Erkenntnisse, die im Rahmen folgender Fragestellung einzuordnen sind:

> Wie gehen die Schüler mit einer Aufgabenstellung um, die keine Zahlenwerte vorgibt, aber trotzdem eine Berechnung erfordert?

Da sich die Auswertung auf die schriftlichen Aufzeichnungen stützt — zwei Beispiele zur Veranschaulichung sind in Abbildung 7.4 zu sehen —, können nur einige Aspekte dieser

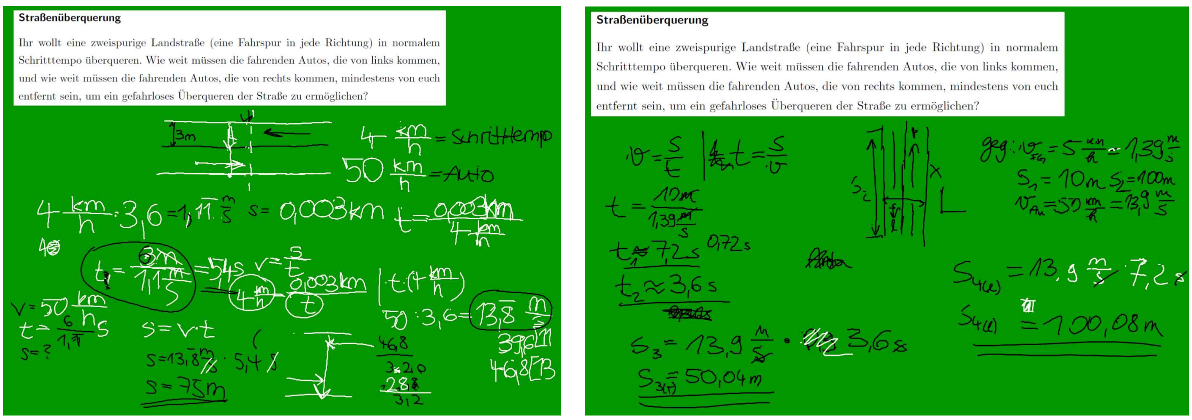


Abbildung 7.4.: Zwei Beispiele eines Tafelbildes zur Aufgabe „Straßenüberquerung“.

Fragestellung beantwortet werden. So lässt sich beispielsweise ersehen, ob die Schüler die Aufgabe überhaupt lösen konnten und welche Fehler sie gegebenenfalls gemacht haben. Auch der Umgang mit den Zahlenwerten zeigt sich in dem Schriftbild. Zudem lassen sich Hinweise auf Strategien entnehmen, zum Beispiel ob eine Skizze angefertigt und ob das Schema „gegeben-gesucht“ hingeschrieben wurde. Bei Unklarheiten stehen die Videos als vertiefende Quelle zur Verfügung.

7.4.1. Ergebnisse

Im Folgenden werden mehrere Aspekte vorgestellt, die einen Beitrag zur obigen Fragestellung leisten und Erkenntnisse hinsichtlich der Anwendbarkeit dieses Aufgabenformats im Unterricht liefern. Ebenfalls werden sich einige Hinweise zu Strategien und Problemen der Schüler zeigen.

Korrektheit der Lösungswege

Die Korrektheit der Lösungswege lässt Rückschlüsse auf das Schwierigkeitsniveau der Aufgabe zu und ist damit ein wichtiges Kriterium zur Beurteilung der unterrichtlichen Umsetzbarkeit des Aufgabenformats. Es könnte sein, dass für die Schüler eine Aufgabenstellung ohne gegebene Zahlenwerte zu schwer ist. Diese Befürchtung lässt sich allerdings nicht bestätigen. Ganz im Gegenteil zeigt sich, dass alle Schülerpaare die Aufgabe bis zum Erreichen eines Ergebnisses bearbeiten konnten. Es gab keine Gruppe, die mit der Aufgabenstellung überfordert war und keine abschließende Lösung erarbeiten konnte.

Bei einer genaueren Betrachtung lassen sich 12 der 15 Lösungswege als korrekt einstufen. Dabei besteht das Kriterium der Korrektheit in der Auswahl der nötigen physikalischen Größen und der Verwendung der richtigen Gleichungen zur Berechnung der Entfernung der Autos. Die Qualität der Abschätzungen spielt keine Rolle, es kommt darauf an, ob die Schüler den physikalisch richtigen Weg zur Berechnung gewählt haben. Bei den drei nicht korrekten Lösungen besteht der Fehler in der Wahl von falschen Formeln. Zwei Gruppen haben die Zeit für die Straßenüberquerung mittels $t = s_{Breite} \cdot v_{Schritt}$ berechnet, eine Gruppe die Entfernung der Autos durch $s_{Auto} = v_{Auto}/t$.

Von den zwölf richtigen Lösungswegen weisen fünf Lösungen kleine Fehler auf. So hat eine Gruppe nur die Lösung für die gesamte Straßenbreite erarbeitet und eine Gruppe nur die Lösung für die halbe Breite. Bei zwei Gruppen sind Rechenfehler beim Berechnen oder Runden von Zahlenwerten aufgetreten. Eine weitere Gruppe hat bei der letzten Berechnung der Entfernung der Autos nicht die Formel $s_{Auto} = v_{Auto} \cdot t$ in dieser Form benutzt, sondern verschiedene Werte für s_{Auto} in die Formel $t = s_{Auto}/v_{Auto}$ eingesetzt, bis die nötige Zeit t erreicht wurde. Dieser Lösungsweg stellt aber eher eine individuelle Lösungsstrategie dar, als dass er als falsch zurückgewiesen werden sollte.

Insofern lässt sich zusammenfassend feststellen, dass alle Gruppen die Aufgabe bearbeiten konnten. Nur drei Gruppen haben eine falsche Formel gewählt, bei zwölf Gruppen ist der Lösungsweg als korrekt einzustufen. Das Aufgabenformat der „Straßenüberquerung“ ohne gegebene Zahlenwerte hat also keine zu hohe Schwierigkeit für die Schüler. Auch die Auswahl der nötigen physikalischen Größen, für die Zahlenwerte abgeschätzt werden mussten, ist allen Gruppen gelungen.

Umgang mit Zahlenwerten

Ein zentrales Merkmal der Aufgabe ist der Verzicht auf gegebene Zahlenwerte, so dass die Schüler die für die Berechnung nötigen Werte abschätzen müssen. Dabei sind sie auf eigene Erfahrungen angewiesen und müssen die Plausibilität ihrer Schätzungen vor diesem Hintergrund bewerten. Daher ist es interessant, zuerst einen Blick auf die konkreten Werte zu werfen, die die Schüler für die benötigten physikalischen Größen geschätzt haben.

Insgesamt müssen die Schüler für drei physikalische Größen Zahlenwerte schätzen. Dies sind die Breite der Straße s_{Breite}, die Geschwindigkeit der Autos auf einer Landstraße v_{Auto} und die Schrittgeschwindigkeit $v_{Schritt}$, mit der man die Straße überquert. Es fällt auf, dass die geschätzten Werte der Schüler eine relativ breite Streuung zeigen. Zudem werden die Straßenbreite und die Geschwindigkeit der Autos tendenziell unterschätzt, während die Schrittgeschwindigkeit eher höhere Werte in den Vorstellungen der Schüler hat — wenn man als plausible Werte eine Straßenbreite von 10 m, eine Schrittgeschwindigkeit von 3-4 km/h und eine Geschwindigkeit auf Landstraßen von 100 km/h annimmt.

Die Verteilung der geschätzten Werte für die Straßenbreite variiert zwischen 4 m und 10 m, am häufigsten wird 6 m und anschließend 10 m geschätzt (siehe Tabelle 7.1). Die Verteilung der geschätzten Werte für die Geschwindigkeit der Autos auf Landstraßen variiert zwischen 50 km/h und 120 km/h, wobei 50 km/h am häufigsten gewählt wurde,

s_{Breite} in m	4	5	6	7	8	10
Anzahl der Gruppen	2	1	5	1	2	4

Tabelle 7.1.: Verteilung der geschätzten Werte für die Straßenbreite.

v_{Auto} in km/h	50	60	70	80	90	100	120
Anzahl der Gruppen	4	1	3	2	1	3	1

Tabelle 7.2.: Verteilung der geschätzten Werte für die Geschwindigkeit der Autos.

$v_{Schritt}$ in km/h	3	4	4,5	5	6	10
Anzahl der Gruppen	2	2	1	8	1	1

Tabelle 7.3.: Verteilung der geschätzten Werte für die Schrittgeschwindigkeit.

vor 70 km/h bzw. 100 km/h (siehe Tabelle 7.2). Die Verteilung der geschätzten Werte für die Schrittgeschwindigkeit variiert zwischen 3 km/h und 10 km/h, wobei deutlich 5 km/h am häufigsten angenommen wird (siehe Tabelle 7.3).

Die Abschätzungen der Schüler sollen nicht im Hinblick auf richtig oder falsch bewertet werden, sondern sind als individuelle Auseinandersetzung mit dem Zusammenhang von physikalischen Größen und deren als realistisch eingeschätzten Werten zu begrüßen. Trotzdem lässt sich unter einem diagnostischen Gesichtspunkt die Hypothese aufstellen, dass bezüglich des intuitiven Gefühls für realistische Werte physikalischer Größen Verbesserungsbedarf besteht. So sind 50 km/h für Autos auf Landstraßen, eine Schrittgeschwindigkeit von 10 km/h oder die Breite einer Landstraße von 4-6 m keine realitätsgetreuen Werte[3].

Ein viel wichtigerer Punkt betrifft allerdings die Art und Weise des Umgangs mit den geschätzten Zahlenwerten in der weiteren Verwendung. Hier zeigt sich ein Problem, das auf die Trennung von mathematischer Berechnung und deren (physikalischem) Sinn hindeutet: Bei fast allen Gruppen (13 von 15, s. u.) nehmen die geschätzten Werte nach der Schätzung den Status von exakten Werten an. Das bedeutet, dass die Schüler zwar die Werte schätzen — und wie auf den Videos auch zu sehen ist, teilweise sehr unsicher dabei sind —, danach jedoch mit diesen Werten rechnen, als wären es exakte gegebene Werte.

Dieses Problem zeigt sich besonders deutlich, wenn die Schüler Zwischen- und Endergebnisse auf bis zu zwei Nachkommastellen genau angeben. So hat eine Gruppe bei-

3 Auf Landstraßen fahren Autos innerorts durchaus 50 km/h, allerdings lässt sich aus den Videos ersehen, dass dies nicht das Argument der Schüler ist.

spielsweise als Ergebnis für die Entfernung der Autos von links 50,04 m und 100,08 m für die Autos von rechts berechnet (s. Abb. 7.4, rechtes Tafelbild). Eine andere Gruppe schreibt in ihrem Antwortsatz, dass „eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 1,11 m/s“ angenommen wird, ein Ergebnis, das aus der Umrechnung der Einheiten für die Schrittgeschwindigkeit erhalten wurde. Dass diese genauen Ergebnisse im Kontext der groben Abschätzung nicht sinnvoll sind, wird von den Schülern anscheinend nicht bemerkt.

Eine genaue Analyse zeigt, dass 13 der 15 Gruppen einen exakten, dem Kontext nicht angemessenen Umgang mit den Zahlenwerten zeigen. Allerdings sind hier einige Abstufungen zu beachten. So haben nur 5 dieser 13 Gruppen durchgängig mit exakten Werten gerechnet. Weitere fünf Gruppen haben zwar exakt mit Kommastellen gerechnet, das Ergebnis dann jedoch gerundet, zum Beispiel von 38,89 m auf 39 m. Allerdings ist auch dieser Umgang nicht als angemessen zu bezeichnen, da einerseits die Zwischenrechnung zu präzise durchgeführt und andererseits auch ein Endergebnis von 39 m noch zu exakt für den Kontext ist. Die restlichen drei Gruppen haben exakt gerechnet und auch das Ergebnis nicht gerundet, allerdings einen Sicherheitsabstand erwähnt, der noch hinzuzurechnen sei.

Nur bei zwei Gruppen kann ein zufriedenstellender Umgang mit den geschätzten Zahlenwerten festgestellt werden. Beide Gruppen haben zwar zwischendurch auch exakte Ergebnisse aufgeschrieben, allerdings wurde bereits der Wert für die Zeit der Überquerung gerundet und das Endergebnis nur mit einer Genauigkeit der Ordnung 10^1 angegeben.

Strategische Aspekte

Bezüglich der Vorgehensweisen der Schüler bei der Bearbeitung der Aufgabe lassen sich auch aus den schriftlichen Aufzeichnungen einige Aspekte erschließen. So haben drei Gruppen ebenfalls die Strategie „gegeben-gesucht“ angewandt, was sich aus den typischen Abkürzungen „geg“ und „ges“ mit anschließenden Symbolen und Zahlenwerten ersehen lässt. Obwohl keine Zahlenwerte in der Aufgabenstellung gegeben sind, haben diese Gruppen dieses Schema zum Strukturieren ihrer Vorgehensweise benutzt. Dabei haben die geschätzten Werte die Rolle der gegebenen eingenommen. Zwei weitere Gruppen haben nur „geg“ mit den geschätzten Werten geschrieben und wieder zwei andere Gruppen nur „ges“ vor das Symbol für die Entfernung der Autos.

Insgesamt haben also 7 der 15 Gruppen zumindest Ansätze der „gegeben-gesucht"-Strategie gezeigt. Im Rahmen dieser Aufgabenstellung kann das Finden der gegebenen Größen allerdings kein Herausschreiben aus dem Text darstellen. Da die Auswahl der relevanten Werte nicht vorgegeben war, mussten auch bei Anwendung dieser Strategie physikalische Überlegungen die Grundlage für das Aufschreiben der „gegebenen" Werte darstellen. Daher ist diese Strategie bei dieser Aufgabenstellung nicht so kritisch zu betrachten, wie es bei den Standardaufgaben aus Schulbüchern der Fall ist.

Ein weiterer, sehr positiv zu bewertender Aspekt zur Strategie der Schüler ist, dass 13 der 15 Gruppen eine Skizze gemacht haben. Die Skizze zeigt in der Regel eine zweispurige Straße mit Autos von links und rechts und einem Fußgänger. Teilweise sind Pfeile für die Bewegungsrichtungen eingezeichnet und auch die physikalischen Größen oder geschätzten Werte direkt in die Zeichnung eingetragen (vgl. Abb. 7.4). Auch die Endergebnisse finden sich teilweise in der Skizze wider.

Das Anfertigen einer Skizze ist ein wünschenswerter Vorgang, der eine Auseinandersetzung mit der physikalischen Situation anzeigt. Das Eintragen von Pfeilen, Werten und Ergebnissen deutet auf die Einbeziehung der Skizze in den gesamten Lösungsprozess hin. Auffällig ist, dass die beiden Gruppen, die keine Skizze angefertigt haben, nach der Strategie „gegeben-gesucht" vorgegangen sind, also zwei der drei Gruppen repräsentieren, die diese Strategie benutzt haben.

Umgang mit halber und ganzer Straßenbreite

Als abschließender Punkt zu den Ergebnissen sei der Umgang der Schüler mit den beiden Fällen der halben und ganzen Straßenbreite analysiert. In der Aufgabenstellung wird nach der Entfernung der von links und rechts kommenden Autos gefragt. Für die Entfernung der von links kommenden Autos ist die halbe Straßenbreite relevant, für die von rechts kommenden Autos muss die gesamte Straßenbreite betrachtet werden. Bis auf zwei Gruppen haben auch alle Schüler diese beiden Fälle berechnet.

Hierbei fällt jedoch auf, dass nur vier Gruppen die Entfernung der von rechts kommenden Autos durch eine Verdopplung der Entfernung der von links kommenden Autos berechnet haben (oder umgekehrt durch Halbierung die Entfernung der von links kommenden Autos berechnet). Die restlichen neun Gruppen haben nur die Zeit für die Überquerung als das Doppelte der Zeit für eine Spur genommen (oder als die Hälfte der Zeit für zwei Spuren). Mit den beiden Werten für die Zeit wurden dann allerdings die

Entfernungen der Autos eigenständig berechnet.

Die Durchführung von zwei eigenständigen Berechnungen deutet auf einen eher schematischen Umgang mit der Mathematik hin. Bei einem tiefen Verständnis von der Bedeutung der Entfernungsberechnung sollte die Verdopplung der Entfernung der leichtere und naheliegende Weg sein. Bei zwei Gruppen zeigen sich auch mögliche negative Folgen der schematischen Trennung beider Berechnungen. Diese Gruppen haben durch Rechenfehler oder Rundung Endergebnisse erhalten, die nicht um den Faktor zwei differieren.

7.4.2. Diskussion

Die vorgestellten Ergebnisse sind sowohl als ein Beitrag zu der Umsetzung von Aufgaben ohne Zahlenwerte im Unterricht zu verstehen als auch als weitere Beschreibung der Stichprobe der 30 Schüler hinsichtlich ihres Umgangs mit relativ traditionellen mathematischen Physikaufgaben. Auch die Aufgabe zur Straßenüberquerung ist den Schulbuchaufgaben mit der Rechnung als zentralem Aufgabenbestandteil näher als den neu erarbeiteten konzeptuell-mathematischen Physikaufgaben.

Aus den vorgestellten Ergebnissen lässt sich ersehen, dass die Schüler mit der Aufgabenstellung zurechtkommen und der Verzicht auf gegebene Zahlenwerte keine zu große Schwierigkeit darstellt. Als positiver Effekt ist zu erwähnen, dass fast alle Schüler eine Skizze der Situation gemacht haben, auf die sie auch im weiteren Lösungsprozess Bezug genommen haben. Die Strategie des „gegeben-gesucht“ wurde dagegen nur von wenigen Schülern angewandt.

Es zeigen sich allerdings einige Aspekte, bei denen die Schüler einen am Kalkül orientierten Zugang zur Mathematik in der Physik zeigen. Die exakte Behandlung der grob geschätzten Zahlenwerte lässt vermuten, dass die Schüler wenig über die Sinnhaftigkeit der Zahlenwerte nachdenken. Die Gewohnheit, die sie vermutlich an anderen Aufgaben erworben haben, Zahlenwerte physikalischer Größen als nach einem Schema zu behandelnde Gegebenheiten anzusehen, scheint sich auch bei den geschätzten Werten durchzusetzen.

Ebenfalls in diese Richtung interpretieren lässt sich die Tatsache, dass alle Gruppen die Schrittgeschwindigkeit in km/h geschätzt haben und danach meistens mit dem umgerechneten Wert in m/s gerechnet haben, der jedoch Nachkommastellen aufweist. Gerade die Gruppen, die eine Schrittgeschwindigkeit von 3 oder 4 km/h angenommen haben, hätten zur Vereinfachung der Rechnung auch 1 m/s wählen können. Dies hätte allerdings eine leichte Abänderung des ursprünglich geschätzten Wertes bedeutet. Dieser flexible Umgang mit den geschätzten Werten konnte in keiner Lösung entdeckt werden.

Als weitere Interpretationsmöglichkeit dieser Beobachtung kommt in Betracht, dass die Schüler die Zahlenwerte eher als statisch ansehen und den physikalischen Größen einen „richtigen“ Wert zuordnen wollen. So kann das Abschätzen als Suche nach „der“ Schrittgeschwindigkeit und „der“ Straßenbreite erfolgen. Ist dann ein Wert gefunden, wird er nicht mehr verändert und auch exakt behandelt.

Bezüglich des Schätzens von Werten lässt sich zudem feststellen, dass die Angemessenheit der Schätzwerte an die Realität noch verbesserungswürdig ist. Wie bereits erwähnt, haben die Schüler die Straßenbreite und die Geschwindigkeit der Autos tendenziell unterschätzt, während die Schrittgeschwindigkeit eher zu hoch angenommen wurde. Zusammengenommen führt dies zu einer recht starken Unterschätzung der nötigen Entfernung der Autos. Während Werte um 150 m bzw. 300 m realistisch sind, haben die meisten Gruppen zweistellige Werte erhalten. Eine Gruppe hat durch die Benutzung der falschen Formel sogar 8 m und 16 m als Ergebnis erhalten und dies als realistisch eingeschätzt, wie auf dem entsprechenden Video erkennbar wird.

Aufgrund dieser Tatsache lässt sich nicht feststellen, ob die Schüler eine Validierung ihrer Ergebnisse vorgenommen haben oder nicht. Anhand der teilweise unrealistisch wirkenden berechneten Entfernungen kommt die Vermutung auf, dass die Schüler keine Validierung vornehmen. Betrachtet man allerdings die der Realität oftmals nicht angemessenen Vorstellungen der Schüler von den Werten physikalischer Größen, kann ebenso eine positive Validierung stattgefunden haben. Diese Frage kann also aus dieser Analyse nicht beantwortet werden.

Der eher technische Umgang mit der Mathematik und die Trennung von Berechnung und physikalischer Bedeutung zeigt sich auch in der analysierten Art der Berechnung der von links und von rechts kommenden Autos. Anstatt eine Verdopplung der Entfernung für die von rechts kommenden oder eine Halbierung für die von links kommenden Autos vorzunehmen, nachdem ein Wert berechnet wurde, gehen die meisten Gruppen so vor, dass sie für beide Entfernungen eigenständige Berechnungen aufstellen.

Insgesamt lässt sich konstatieren, dass die natürliche Aufgabenstellung ohne Zahlenwerte, wie sie in der Aufgabe „Straßenüberquerung“ realisiert ist, eine gute Verbesserungsmöglichkeit der entsprechenden Schulbuchaufgabe darstellt. Die Schüler können gut mit der Aufgabe umgehen und gelangen größtenteils zu korrekten eigenständigen Lösungen. Zudem zeigt sich mit dem Anfertigen einer Skizze ein sehr positiver Effekt auf die Bearbeitungsstrategie.

Trotzdem dürfen die Erwartungen an dieses Aufgabenformat nicht zu hoch gesteckt werden. Es steht immer noch die Berechnung im Zentrum der Aufgabe und es zeigen sich weiterhin Aspekte eines instrumentellen Verständnisses oder zumindest technischen Umgangs mit der Mathematik. Insbesondere an dem exakten Umgang mit den geschätzten Zahlenwerten zeigt sich die Trennung von Mathematik und (physikalischer) Bedeutung. Hier können Aufgabenstellungen ohne Zahlenwerte einen Beitrag leisten, eine sinnvolle Nutzung von Zahlen und deren Verankerung in physikalischer Bedeutung zu fördern. Andererseits steht zu befürchten, dass durch die Konzentration auf die Berechnung weiterhin ein schematischer Zugang zur Mathematik begünstigt wird.

8. Problemanalyse: Vorbetrachtungen

Die Auswertungen der Aufgaben im vorigen Kapitel deuten bereits an, dass viele Schüler einen kalkülorientierten Umgang mit der Mathematik haben und die technischen Fähigkeiten im Vordergrund stehen. Allerdings zeigt sich auch, dass die Aufgabenstellung einen Einfluss auf die Strategien der Schüler hat. Bei den vier konzeptuell-mathematischen Physikaufgaben steht die Übersetzung zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischer Repräsentation im Fokus, so dass der Einsatz struktureller Fähigkeiten naheliegt. Die hierbei auftretenden Probleme und Schwierigkeiten liefern eine wichtige Basis, um das Lernen der Verbindung von Physik und Mathematik zur Aufgabe des Physikunterrichts machen zu können.

Sowohl dieses als auch die folgenden beiden Kapitel widmen sich der Untersuchung der zentralen Forschungsfrage dieser Arbeit:

1. Welche Probleme lassen sich im Verständnis der Schüler beim Verbinden von Physik und Mathematik identifizieren?

Dazu werden in diesem Kapitel einige methodische Vorbemerkungen zum Ablauf der Analyse, der Konstruktion der Problemkategorien und zur Überprüfung der Gütekriterien der Analyse erläutert. Anschließend folgt eine Verortung der Probleme im revidierten Modellierungskreislauf als deduktive Klassifizierung der Kategorien. Das darauf folgende Kapitel ist der Präsentation der Ergebnisse gewidmet. Dazu werden alle identifizierten Probleme mit zugehörigen analysierten Beispielen vorgestellt. Das abschließende dritte Kapitel zu diesem Block der Problemanalyse befasst sich mit der Diskussion der Ergebnisse. Es werden ausführliche Fallstudien vorgestellt, in denen die Auswirkungen der Probleme auf den Lösungsprozess analysiert werden. Weiterhin werden einige wichtige Probleme im Hinblick auf das Verständnis der Schüler zum Zusammenhang von Physik und Mathematik diskutiert und mit möglichen didaktischen Konsequenzen in Verbindung gebracht.

8.1. Methodische Vorbemerkungen

8.1.1. Ablauf der Analyse und Konstruktion der Problemkategorien

Das Datenmaterial, auf das sich die Auswertung stützt, wird durch die transkribierten Videos der Aufgabenbearbeitung der vier konzeptuell-mathematischen Physikaufgaben bereitgestellt. Genaue Informationen zum Setting sowie zum Umfang und zur Erstellung der Transkripte finden sich in den Kapiteln 6.2 und 7.1.1.

Zur Beantwortung der Fragestellung ist eine explorative qualitative Analyse der Transkripte notwendig. Der Großteil der Problemkategorien wird induktiv aus dem Datenmaterial erarbeitet um die Probleme der Schüler bei der Verbindung von Physik und Mathematik zu beschreiben. Zur Erarbeitung der Problemkategorien wird das methodische Vorgehen eng an die qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2010, Kap. 5) angelehnt, wobei insbesondere die Technik der zusammenfassenden Inhaltsanalyse zur induktiven Erarbeitung der Kategorien Anwendung findet (Mayring, 2010, S. 67ff.).

Die nach Mayring wichtigen ersten Schritte für eine Inhaltsanalyse werden durch die Bestimmung des Ausgangsmaterials — mit einer Analyse der Entstehungssituation und formaler Charakteristika des Materials — sowie die theoriegeleitete Differenzierung der Fragestellung dargestellt. Detaillierte Analysen und Ausführungen diesbezüglich sind in den ersten beiden Kapiteln des empirischen Teils sowie im theoretischen Teil dieser Arbeit vorgenommen worden. Weiterhin wird im folgenden Abschnitt 8.2 eine Verortung der Problemanalyse im revidierten Modellierungskreislauf vorgenommen, wobei sich eine deduktive Klassifizierung der Kategorien in verschiedene Problembereiche ergibt.

Als nächstes ist eine genaue Spezifizierung der Analyse notwendig, um eine Anleitung zur Erarbeitung der Problemkategorien bereitzustellen. Die Transkripte werden nach Aufgaben gruppiert analysiert. Dabei wird die Aufgabenbearbeitung jedes Schülerpaares unter der oben genannten Fragestellung betrachtet. Entscheidend für die Auswahl als relevante Textstelle sind zwei Kriterien: Die Schüler machen etwas, das mit dem Zusammenhang von Physik und Mathematik zu tun hat und es ist problematisch, wie sie es machen.

Eine Tätigkeit zum Zusammenhang von Physik und Mathematik ist in dem Sinne zu verstehen, wie es das physikalische Mathematisierungsmodell (siehe Kapitel 4.2) nahelegt. Wenn die Schüler Überlegungen äußern, die im Rahmen des Modells im Zusammenhang mit der Verbindung unterschiedlicher Mathematisierungsniveaus stehen, dann ist das Kriterium der in der Fragestellung erwähnten „Verbindung“ erfüllt (nähere Erläuterungen finden sich im folgenden Abschnitt 8.2).

Zudem muss die Überlegung der Schüler aus professioneller Sicht problematisch sein. Der Analysierende entscheidet nach fachlichen und didaktischen Gesichtspunkten, ob die Verbindung von Physik und Mathematik korrekt ist, oder ob es kritische Aspekte gibt, die zu beanstanden sind. So sind beispielsweise sowohl fachlich falsche Mathematisierungen als auch auf Erinnerung beruhende Assoziationen von Formeln als problematisch einzustufen. Dabei ist es unerheblich, ob die Schüler ein Problem erkennen oder nicht. Die Definition des „Problems“ in der Fragestellung ist also aus Sicht des Experten zu sehen.

Sind bei der Analyse der Transkripte die beiden genannten Kriterien erfüllt, ist die betreffende Textstelle als für die Fragestellung relevant einzustufen. Dabei kann eine Textstelle von einem einzigen Satz oder Halbsatz bis hin zu einem mehrere Tabellenzeilen umfassenden Dialog reichen. Entscheidend ist der Zusammenhang in Bezug auf ein Problem.

Die Analyse der Transkripte erfolgt mit Hilfe des Computerprogramms MaxQDA. Die Transkripte sowie die Tafelbilder aller Gruppen werden in das Programm geladen und nach der Aufgabenstellung sortiert. Zur induktiven Ableitung der Kategorien wird die Technik der Zusammenfassung genutzt (Mayring, 2010, S. 67ff.). Relevante Textstellen werden markiert und eine neue Kategorie erstellt. Die Kategorie erhält noch keine präzise Bezeichnung, sondern besteht aus einer fallspezifischen Beschreibung des problematischen Aspektes.

Nach diesem Vorgehen werden ungefähr fünf Transkripte analysiert. Danach sind einige Beschreibungen problematischer Aspekte vorhanden, die weiter zu Kategorien entwickelt werden müssen. Dazu werden die Problembeschreibungen paraphrasiert, so dass hauptsächlich inhaltstragende Wörter erhalten bleiben. In einem anschließenden Schritt werden diese Paraphrasen weiter abstrahiert, so dass eine möglichst prägnante Bezeichnung des Problems erhalten bleibt und als vorläufige Kategorie fungieren kann.

Die so erhaltenen Problemkategorien werden nach Redundanzen gesichtet. Kategorien, die sich auf gleiche oder sehr ähnliche Probleme beziehen, können zusammengelegt werden, wobei eine Überarbeitung der Bezeichnung sinnvoll sein kann. Zudem werden ausführliche Beschreibungen zu jeder Kategorie in MaxQDA festgehalten.

Mit dieser Sammlung von vorläufigen Problemkategorien werden die nächsten fünf

Transkripte analysiert. Dabei werden wieder problematische Aspekte identifiziert, die zuerst auf eine Einordnung in eine der bereits vorhandenen Kategorien überprüft werden. Passt eine vorhandene Kategorie, wird die neue Textstelle ebenfalls dieser Kategorie zugeordnet. Gibt es noch keine passende Kategorie, wird, wie bereits zu Beginn, zuerst eine Beschreibung des Problems als neue Kategorie festgelegt.

Nach der Analyse dieser zweiten fünf Transkripte erfolgt wieder die Überarbeitung der neu ergänzten Kategorien mit den Schritten der Paraphrasierung, Abstrahierung und Prüfung auf Redundanzen mit weiterer Überarbeitung der Bezeichnung. Nach diesem Muster werden die restlichen Transkripte analysiert, wobei die Blöcke mehr als fünf Transkripte umfassen können, da mit zunehmender Analyse die Anzahl an neu ergänzten Kategorien abnimmt. Zudem kann es sein, dass für einige Kategorien noch keine prägnanten Bezeichnungen gefunden werden. In diesem Fall wird weiterhin mit der Paraphrasierung gearbeitet.

Nach der Analyse aller Transkripte werden die Kategorien erneut auf Redundanzen überprüft und ausstehende Paraphrasierungen prägnant formuliert. Die so erhaltenen Kategorien spiegeln die Gesamtheit der identifizierten Probleme wieder. Zur weiteren Strukturierung und Klassifizierung werden die Kategorien nach zusammenhängenden Problemfeldern gruppiert und in die bereits bestehenden, deduktiv hergeleiteten Problembereiche eingeordnet. Abschließend werden alle Problemkategorien definiert und mit Ankerbeispielen konkretisiert, belegt und veranschaulicht.

8.1.2. Gütekriterien

Die hier vorgenommene qualitative Analyse hat zum Ziel, mögliche Probleme von Schülern beim Übersetzen zwischen Physik und Mathematik zu identifizieren. Dieses explorative Vorgehen hat den Zweck, einen Einblick in die Vorstellungen der Schüler und deren Verständnis vom physikalisch-mathematischen Denken zu liefern. Mit diesem Wissen ist es möglich, Gedanken und Probleme der Schüler zur konzeptuell-mathematischen Physik nachzuvollziehen und passende Hilfestellungen zu leisten. Auch bei der Entwicklung von Lehr-Lern-Umgebungen und Materialien ist es wichtig, das Vorwissen der Schüler mit einzubeziehen.

Wenn die Problemanalyse diesen Zweck erfüllen soll, ist es wichtig, die Probleme möglichst detailliert zu erfassen und feine Unterschiede herauszuarbeiten. Bei einer qualitativen Inhaltsanalyse geht eine hohe Detailtreue und Auflösung jedoch immer zulasten der Reliabilität des Kategoriensystems (Mayring, 2010, S. 121). Die Zielsetzung der hier angestrebten Problemanalyse ist daher als gegensätzlich zu dem Streben nach hoher Reliabilität anzusehen.

Es lässt sich allerdings argumentieren, dass das Gütekriterium der Reliabilität ohnehin keine Aussage zur Güte dieser Analyse zulässt. Die Reliabilität in der qualitativen Inhaltsanalyse ist nach Mayring (2010, S. 120 ff.) ein Ausdruck für die Zuverlässigkeit der Anwendung des Kategoriensystems auf das Material. Dabei wird das Kategoriensystem als ein Instrument angesehen, das auch von anderen Wissenschaftlern zur Analyse verwendet werden kann.

Es ist jedoch nicht das Ziel der hier vorgenommenen Problemanalyse, ein (vollständiges) Instrument zur Analyse bereit zu stellen, es geht vielmehr darum, die Existenz möglicher Probleme zu identifizieren. Es wird nicht angenommen, dass die identifizierten Probleme eine abgeschlossene Menge darstellen. Insofern würden bei einer Analyse neuen Materials auch neue Probleme identifiziert werden. Da es bisher keine weiteren bekannten Studien in dieser Richtung gibt, sollte zunächst die empirische Basis durch weitere Untersuchungen vergrößert werden, bevor die Erarbeitung eines Kategoriensystems als Instrument sinnvoll erscheint.

Aus diesen Gründen ist das Gütekriterium der Reliabilität für die hier vorgenommene explorative Problemanalyse nicht passend und zudem im Widerspruch zur intendierten hohen Auflösung und Detailtreue. Es lässt weiterhin nur eine sehr bedingte Aussage zur Güte der Analyse zu, da der entscheidende Punkt die Existenz der Probleme ist und nicht deren zuverlässige Identifizierung und Zuordnung zu einer Kategorie. Daher kommt dem Gütekriterium der Validität eine entscheidende Rolle im Gegensatz zur Reliabilität zu. In diesem Sinne legt auch Lamnek (2010, S. 154) dar, dass generell bei qualitativen Analysen eine hohe Validität erreicht werden könne, die die Nachteile der Reliabilität ausgleiche[1].

Um eine Aussage zur Güte der Analyse machen zu können, muss daher abgesichert werden, dass die identifizierten Probleme auch wirklich existieren. Diese Überprüfung der Richtigkeit der Bedeutungsrekonstruktion des Materials wird als semantische Gültigkeit bezeichnet (Mayring, 2010, S. 119) und stellt einen Aspekt der Validität dar. Durch eine Überprüfung anhand von Expertenurteilen lasse sich die Angemessenheit der Kategoriendefinitionen validieren. Dieser Aspekt stellt ein wichtiges Gütekriterium für die

1 Demnach sei es bei qualitativen Analysen auch sinnvoll, sich von der aus der quantitativen Methodik bekannten Beziehung, dass die Reliabilität eine notwendige Bedingung der Validität darstellt, zu lösen.

vorgenommene Problemanalyse dar, da er den entscheidenden Punkt der Existenz der Probleme betrifft.

Um die semantische Gültigkeit zu überprüfen, wurden die erarbeiteten Problemkategorien und deren Klassifizierung zu mehreren Zeitpunkten der Analyse mit ein oder zwei Physikdidaktikern diskutiert. Zum Ende der Auswertung wurde der vorläufige Endstand nochmals in einer Gruppe von neun Physikdidaktikern zur Diskussion gestellt. Dabei wurde jede Problemkategorie mit einem zugehörigen Ankerbeispiel erläutert. Die meisten Problemkategorien und Klassifizierungen wurden angenommen, in einigen Fällen wurden alternative Beschreibungen und Zuordnungen eingebracht.

Entsprechend der Kritiken wurden die Klassifizierungen und Problemkategorien mit zugehörigen Beispielen einer abschließenden Überarbeitung unterzogen. Das Resultat wurde erneut mit zwei der neun Physikdidaktiker diskutiert um die angemessene Umsetzung abzusichern. Zusätzlich wird durch die ausführliche Darstellung der Ergebnisse im nächsten Kapitel, in dem jede Problemkategorie mit mindestens einem Beispiel erläutert wird, für jeden Leser die Überprüfung der semantischen Gültigkeit ermöglicht.

Als weiteren Aspekt zum Gütekriterium der Validität führt Mayring (2010, S. 119) die Stichprobengültigkeit an. Um die Stichprobe der an der Studie teilnehmenden Schüler einschätzen zu können, wurden in Kapitel 7 bereits mehrere Aspekte beleuchtet. Aus den dargestellten Erkenntnissen zeigt sich, dass die teilnehmenden Schüler tendenziell gute Schüler sind, allerdings gibt es mehr durchschnittliche als herausragend gute. Insofern werden die Ergebnisse so einzuschätzen sein, dass die identifizierten Probleme nicht nur bei wenigen sehr guten Schülern bestehen, sondern durchaus Relevanz für den breiten Physikunterricht haben. Speziell Probleme besonders schwacher Schüler werden jedoch unterrepräsentiert sein.

Auch die Erkenntnisse aus der Auswertung der schriftlichen Aufgaben, der Frage nach der Rolle von Formeln sowie der Schulbuchaufgabe zum ICE stimmen mit vielen aus anderen Studien bekannten Ergebnissen überein. Die Schüler zeigen oftmals einen technischen Umgang mit der Mathematik und sehen die Rolle von Formeln tendenziell als Hilfsmittel zum Rechnen. Insofern ist die Stichprobe der Schüler im Hinblick auf den Umgang mit der Mathematik im physikalischen Kontext als typisch einzuschätzen.

Bezüglich der von Mayring (2010, S. 119 f.) erwähnten ergebnisorientierten Aspekte der Validität und der Konstruktvalidität können für die vorgenommene Problemanalyse zur konzeptuell-mathematischen Physik kaum belastbare Aussagen gemacht werden. Es liegen weder Erkenntnisse einer anderen Untersuchung mit ähnlicher Fragestellung oder Erfahrungen mit dem Kontext des vorliegenden Materials vor, noch kann ein Bezug zu bisherigen Erfolgen mit ähnlichen Konstrukten oder Situationen hergestellt werden. Nur aus der Einordnung in die Theorie kann ein Hinweis auf die Konstruktvalidität entnommen werden. Dazu wird im folgenden Abschnitt eine Verortung der Problemkategorien im revidierten Modellierungskreislauf vorgenommen[2].

8.2. Verortung der Probleme im revidierten Modellierungskreislauf

Das physikalische Mathematisierungsmodell und der daraus resultierende revidierte Modellierungskreislauf, wie sie im theoretischen Teil hergeleitet wurden (siehe Kapitel 4.2), liefern den theoretischen Rahmen dieser Arbeit und der empirischen Studie. Diese Modelle haben bereits die Analyse der Schulbuchaufgaben sowie die Konstruktion der konzeptuell-mathematischen Physikaufgaben angeleitet. Die Analyse der Übersetzungsprobleme zwischen Physik und Mathematik sollte sich ebenfalls in dem Rahmen der neuen Modelle verorten lassen. Dabei ergeben sich drei zu erwartende Problembereiche, die in Abbildung 8.1 im revidierten Modellierungskreislauf markiert sind.

Strukturelle Fähigkeiten

Die strukturellen Fähigkeiten werden in dem revidierten Modellierungskreislauf durch die Pfeile repräsentiert, die die Verbindung zwischen verschiedenen Mathematisierungsniveaus innerhalb des physikalisch-mathematischen Modells herstellen. Somit zielt die Forschungsfrage insbesondere bezüglich der strukturellen Fähigkeiten auf eine detaillierte Analyse der Verständnisprobleme der Schüler ab. Das Übersetzen zwischen (physikalischer) Bedeutung und mathematischen Strukturen stellt einerseits den Kern der konzeptuell-mathematischen Physik dar, andererseits sind gerade hier Probleme und Vorstellungen zu erwarten, die den Schülern einen sinnvollen Umgang mit der Mathematik in der Physik — und damit die unterstützende Nutzung der Mathematik für das physikalische Verständnis — erschweren.

2 An dieser Stelle sei erwähnt, dass Mayring (2010, S. 120) von einer Einordnung in etablierten Theorien und Modellen spricht. Der revidierte Modellierungskreislauf ist jedoch im Rahmen dieser Arbeit erarbeitet worden. Als Beleg für die Akzeptanz dieses Modells sei die Publikation (Uhden et al., 2012) angeführt, auch wenn damit noch nicht von einer etablierten Theorie ausgegangen werden kann.

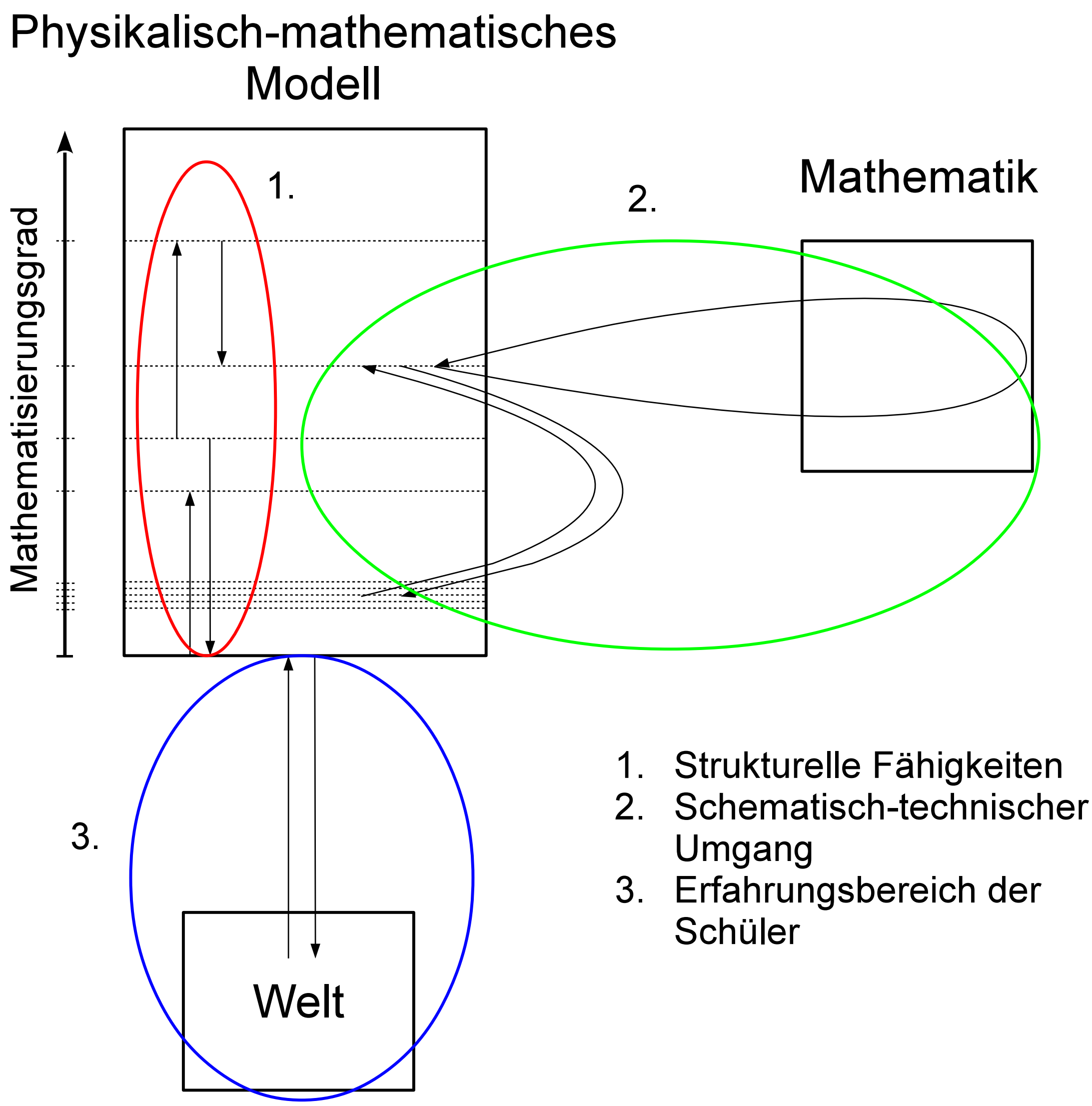


Abbildung 8.1.: Markierung der drei Problembereiche, die anhand des revidierten Modellierungskreislaufs zu erwarten sind.

Schematisch-technischer Umgang

Abgesehen von den strukturellen Fähigkeiten betrifft ein zu erwartender Problembereich die Anwendung technischer Fähigkeiten und eine damit einhergehende oberflächliche Verbindung von Physik und Mathematik. Diese Art der Verbindung stellt an sich bereits ein Übersetzungsproblem dar, da sie ein Ersatz für die eigentlich angemessenen strukturellen Fähigkeiten darstellt. Wenn die Schüler also eine oberflächliche Verbindung als Ersatz für bewusstes Mathematisieren oder Interpretieren herstellen oder kalkülorientiert vorgehen, obwohl eine inhaltliche Übersetzung angebracht wäre, dann ist eine Einordnung in den Problembereich des schematisch-technischen Umgangs vorzunehmen.

Anhand des revidierten Modellierungskreislaufs lassen sich weiterhin bereits drei zu erwartende Problemkategorien zum schematischen Umgang ableiten. Innerhalb des Modells existieren drei Pfeile in diesem Problembereich, die jeweils als unterschiedliche Ausprägung einer oberflächlichen Verbindung interpretiert werden können. Zum einen gibt es die beiden Pfeile, die die Ersatzhandlungen für das Mathematisieren und Interpretieren repräsentieren, indem sie das physikalisch-mathematische Modell beim Verbinden zweier Niveaus verlassen. Sie stehen für eine auf Erinnern und Assoziation beruhende Verbindung, wenn beispielsweise auswendig gelernte Formeln anhand von Symbolen ausgewählt werden.

Der dritte Pfeil repräsentiert eigentlich die Anwendung technischer Fähigkeiten, zum Beispiel beim Ausrechnen von Zahlenwerten. Dies stellt allerdings nicht unbedingt ein Problem dar, da es korrekt ausgeführt und teilweise auch angebracht sein kann. Im Rahmen einer Problemkategorie zum Übersetzen kann dieser Pfeil daher als unangemessene Routine verstanden werden, die als Ersatz für einen inhaltlichen Abgleich zwischen Bedeutung und Mathematik angewandt wird.

Mit dieser Deutung der drei Pfeile zum Problembereich des schematisch und technisch orientierten Umgangs mit der Mathematik, ergeben sich drei Problemkategorien. Die genauere Spezifizierung dieser Kategorien sowie die gegebenenfalls nötige Ergänzung weiterer Problemkategorien muss die Analyse der empirischen Daten ergeben.

Erfahrungsbereich der Schüler

Als dritter Problembereich, der beim Verbinden von Physik und Mathematik relevant ist, ergibt sich aus dem revidierten Modellierungskreislauf die Interferenz mit dem Bereich der „Welt" und den zugehörigen Verbindungspfeilen — Idealisieren und Validieren. Mit dem Wort „Interferenz" soll bereits ausgedrückt werden, dass es sich um eine weitere Möglichkeit der Problemgenerierung zur Verbindung von Physik und Mathematik handelt, die durch eine Wechselwirkung mit dem Erfahrungsbereich der Schüler entsteht — anders als bei dem Problemfeld zu den strukturellen Fähigkeiten, das direkt auf die Übersetzung bezogene Problemen umfasst, und bei dem Problemfeld des schematischen Umgangs, bei dem die Problematik im Ersatz der strukturellen Fähigkeiten besteht.

Die Interferenz mit der „Welt“ kann darin bestehen, dass die Schüler aufgrund von Erfahrungen bestimmte Vorstellungen haben, die die Verbindung von mathematischer Struktur und physikalischer Bedeutung beeinflussen. Die Verbindungspfeile in dem revidierten Modellierungskreislauf, die die Validierung bzw. Idealisierung repräsentieren, lassen bereits eine Problemkategorie erwarten. So kann eine mögliche Problematik darin bestehen, dass die Schüler Vorstellungen zur Realität und deren Beschreibung mittels Modellen haben, die mit dem idealisierten Charakter physikalisch-mathematischer Modelle nicht zusammenpassen und daher auch die Verbindung von Physik und Mathematik beeinflussen. Es sind weitere Einflüsse aufgrund des subjektiven Erfahrungsbereichs der Schüler zu erwarten, die genaue Spezifizierung sollte sich ebenfalls aus der Analyse der empirischen Daten ergeben.

Ergänzende Probleme

Zusätzlich zu diesen drei Problembereichen, die sich aus der theoretischen Verankerung der Problemanalyse in dem revidierten Modellierungskreislauf ergeben, sind weitere Einflussfaktoren denkbar, die keinem der drei Bereiche eindeutig zugeordnet werden können, aber trotzdem die Verbindung von Mathematik und Physik beeinflussen. Um auch diese Probleme einzuordnen, ist ein vierter Problembereich „Ergänzende Probleme“ angebracht.

Zwei Problemkategorien, die als ergänzende Probleme aufgefasst werden, betreffen die physikalische und mathematische Korrektheit. Wenn die Schüler mit der Übersetzung von Mathematik und Physik beschäftigt sind, stellen die physikalische und mathematische Korrektheit notwendige Voraussetzungen für einen korrekten Zusammenhang dar. Wenn beispielsweise bei der Aufgabe „Luftwiderstand“ ein Schüler den physikalischen Zusammenhang von Geschwindigkeitsquadrat und Luftwiderstand so analysiert, dass bei größerer Geschwindigkeit der Luftwiderstand abnimmt, dann wird die mathematisch korrekte Mathematisierung zu einer indirekt proportionalen — und damit falschen — Abhängigkeit führen. Ebenso kann das physikalisch korrekte Erkennen einer proportionalen Abhängigkeit von Geschwindigkeitsquadrat und Luftwiderstand durch eine falsche mathematische Übersetzung zu einer indirekten Proportionalität in der Gleichung führen.

In diesen Fällen ist die Verbindung von Physik und Mathematik ebenfalls nicht mehr korrekt, das Problem liegt allerdings nicht in der Übersetzung an sich, sondern in der rein physikalischen oder rein mathematischen Korrektheit. Diese Problematik ist keinem der drei Problembereiche in dem revidierten Modellierungskreislauf zuzuordnen, sie wirkt eher als ein zusätzlicher Einfluss, der ebenfalls zu Problemen führen kann.

Da diese Art von Problemen jedoch rein physikalischer oder rein mathematischer Natur ist, sollen diese Problemkategorien nicht näher aufgelöst werden. Eine detaillierte Analyse dieser Probleme würde bereits bekannte Erkenntnisse zu Schülervorstellungen und mathematischen Problemen reproduzieren, so dass kein wesentlich neuer Erkenntnisgewinn zu erwarten ist. Es stünde dagegen eher zu befürchten, dass die Analyse der Übersetzungsprobleme überlagert und aus dem Fokus gerückt würde. Trotzdem ist es wichtig, die physikalische und mathematische Korrektheit an dieser Stelle zu erwähnen und auch ihre Einordnung in die Problembereiche zu thematisieren, da Probleme dieser Art mit Sicherheit auftreten und einen Einfluss auf die Verbindung von Physik und Mathematik ausüben.

Zusammenfassung

Aus der dargelegten Verortung der Problemanalyse innerhalb des revidierten Modellierungskreislaufs ergibt sich folgende Grobstruktur zur Klassifizierung der Problemkategorien:

1. Probleme im Bereich struktureller Fähigkeiten
2. Schematisch-technischer Umgang und oberflächliche Verbindung
    a) „gebogener Pfeil hoch“
    b) „gebogener Pfeil runter“
    c) „geschwungener Pfeil“
3. Interferenz mit dem Erfahrungsbereich der Schüler
    a) „Probleme mit dem idealisierten Charakter physikalisch-mathematischer Modelle“
4. Ergänzende Probleme
    a) Mathematische Korrektheit
    b) Physikalische Korrektheit

Die Analyse der empirischen Daten wird sowohl dazu führen, die bereits angedeuteten Problemkategorien näher zu spezifizieren, als auch weitere Kategorien zu ergänzen. Insbesondere wird eine detaillierte Auflösung möglicher Probleme bezüglich der strukturellen Fähigkeiten angestrebt. Weitere Problemkategorien in den Bereichen des schematisch-technischen Umgangs, der Interferenz mit dem Erfahrungsbereich der Schüler sowie bei den ergänzenden Problemen sind ebenfalls möglich.

9. Problemanalyse: Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Problemanalyse detailliert erläutert. Es werden alle identifizierten Probleme vorgestellt und mit mindestens je einem analysierten Beispiel unterlegt. Zuerst wird jeweils die Problemdefinition allgemein erklärt, bevor anhand von Fallbeispielen aus den Transkripten spezifische Ausprägungen der Problematik veranschaulicht werden. Die Probleme sind in Kategorien zusammengefasst, die jeweils einem der vier bereits erläuterten Problembereiche zugeordnet sind. Der Bereich der strukturellen Fähigkeiten ist noch in weitere acht Problemfelder unterteilt, die jeweils zwei bis fünf Problemkategorien enthalten.

Bei der Erklärung der Probleme werden Formulierungen gebraucht, die vermeintlich eine Generalisierung anzudeuten scheinen, wie beispielsweise „Der Struktur werden Bedeutungen zugeschrieben.“ oder „Die Schüler haben Probleme mit...“. Dies geschieht jedoch nur aufgrund besserer Lesbarkeit, gemeint ist immer „Es gibt Fälle, in denen der Struktur diese Bedeutungen zugeschrieben werden.“ oder „Einige Schüler haben Probleme mit...“. Die Aussagen beziehen sich immer nur auf die Schüler, die ein Problem der entsprechenden Kategorie aufweisen.

Weiterhin ist zu bemerken, dass die vorgestellten Problemkategorien im Bezug auf die zugeordneten Beispiele nicht disjunkt sind. Damit ist gemeint, dass die Aussagen oder Dialoge der Schüler teilweise nicht eindeutig einer einzigen Problemkategorie zuzuordnen sind. Dies ist jedoch keine Schwachstelle des Kategoriensystems, sondern eine notwendige Eigenschaft, da in der Regel durchaus mehrere Verständnisprobleme bei einem Schüler vorhanden sind und diese auch bereits in einer Aussage zum Ausdruck kommen können.

9.1. Probleme im Bereich struktureller Fähigkeiten

Der erste Problembereich betrifft die strukturellen Fähigkeiten (siehe Abb. 9.1). Die Identifizierung von problematischen Vorstellungen zur (physikalischen) Bedeutung mathematischer Strukturen stellt den wesentlichen Aspekt der Fragestellung in Bezug auf die Verbindung von Physik und Mathematik dar. Die strukturellen Fähigkeiten stellen einerseits den Kern der konzeptuell-mathematischen Physik dar, andererseits sind ge-

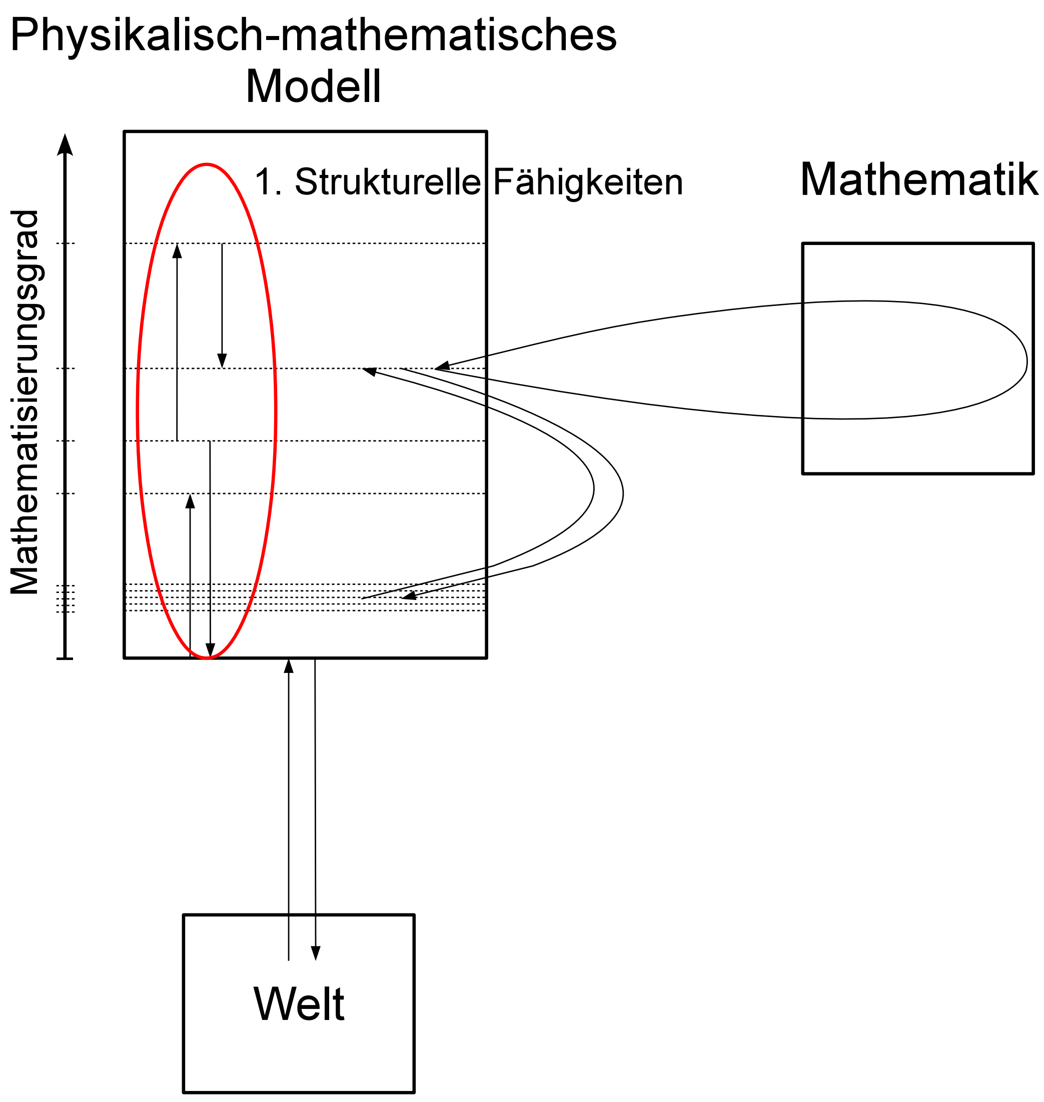


Abbildung 9.1.: Markierung des ersten Problembereichs „Strukturelle Fähigkeiten" im revidierten Modellierungskreislauf.

rade hier Probleme und Vorstellungen zu erwarten, die den Schülern einen sinnvollen Umgang mit der Mathematik in der Physik — und damit die unterstützende Nutzung der Mathematik für das physikalische Verständnis — erschweren.

Bei der Analyse der Probleme haben sich in Bezug auf den Bereich der strukturellen Fähigkeiten acht Problemfelder ergeben, die jeweils zwei bis fünf Problemkategorien enthalten. In Tabelle 9.1 ist ein Überblick über alle Problemfelder samt Problemkategorien dargestellt, die nähere Erläuterung jedes einzelnen Problems ist in dem entsprechenden Abschnitt dargelegt.

9.1.1. Problematische Vorstellungen zu einem Verhältnis zweier physikalischer Größen

Der mathematischen Struktur des Verhältnisses zweier Größen werden Bedeutungen zugeschrieben, die auf einen Zusammenhang der beiden Größen hindeuten. Dabei lassen sich zwei Problemkategorien unterscheiden. Die erste bezieht sich auf die Zusammengehörigkeit der einzelnen Elemente bei zusammengesetzten Einheiten, die zweite beinhaltet die Vorstellung eines starren Zusammenhangs der Größen in einem Verhältnis.

a. Zusammengehörige Einheit

Bei einer zusammengesetzten Einheit, die aus dem Verhältnis zweier Einheiten besteht (z.B. Dichte), können die einzelnen Teile nicht unabhängig voneinander umgewandelt werden, da dann der Zusammenhang zur ursprünglichen Einheit nicht mehr erhalten bleibt.

In dem folgenden Dialog wird diese Ansicht bei dem ersten Schüler (S1) deutlich. Zuvor hat sein Partner (S2) in einer Einheitenrechnung die Einheit Meter aus der Einheit der Dichte (kg/m^3) in Zentimeter umgewandelt, um es mit einer anderen Einheit, die schon in Zentimeter aufgeschrieben wurde, kürzen zu können. S1 sieht bei dem Verhältnis kg/cm^3 den Zusammenhang zur Einheit der Dichte als verletzt an.

S1: Das können wir nicht.

S2: Na klar, das Zentimeter was dann übrig bleibt.

S1: Das ist aber ρ.

S2: Aber das was übrig bleibt, das ist ja nicht mehr ρ...was man gekürzt hat.

Problemfelder	Problemkategorien
1. Problematische Vorstellungen zu einem Verhältnis zweier physikalischer Größen	a. Zusammengehörige Einheit
	b. Starres Verhältnis
2. Problematische Vorstellungen zur Bedeutung eines Produktes zweier physikalischer Größen	a. Die Größen hängen zusammen
	b. Die physikalischen Größen müssen sich auf den gleichen Körper beziehen
3. Problematische Vorstellungen zum Ausdruck von Wichtigkeit in mathematischen Strukturen	a. Wichtige Position
	b. Direkt proportional ist wichtiger
	c. Kommutativität einer Summe
4. Probleme beim Mathematisieren von Proportionalität	a. Proportionalität in Gleichung übertragen
	b. Proportionalität mit mathematischer Operation verknüpfen
5. Probleme mit der Verwendung des neutralen Elements 0 oder 1	a. Unbehagen mit Null
	b. Null wird implizit mathematisiert
	c. Vermischung von 0 und 1
6. Probleme mit dem Konzept der Änderungsrate und zugehörigen mathematischen Strukturen	a. Konstante als konstante Zunahme
	b. Unterschied zwischen Beschleunigung und Änderungsrate der Geschwindigkeit
7. Nichtbeachtung der Eigenschaften einer Funktion	a. Unverständnis zur Bedeutung eines konstanten Funktionsterms
	b. Abhängigkeit des Parameters vom Funktionswert
	c. Keine Differenzierung zwischen Funktionsvariable und Parameter
	d. Unterschiedliche Bedeutungen von Funktionstermen
8. Auffassung eines Produktes als Funktion	a. Größe mal Zeit ist: Größe in Abhängigkeit von der Zeit
	b. Größe mal Zeit ist: Formel für die Größe
	c. Größe mal Zeit ist: Zeit der Größe
	d. Größe mal Zeit ist: Zeit des Ergebnisses
	e. Gegenseitige Beeinflussung der Faktoren

Tabelle 9.1.: Überblick über die identifizierten Probleme mit strukturellen Fähigkeiten.

> S1: Kann man aber nicht mitten in der Gleichung was umstellen.
>
> S2: Kann man nicht?
>
> S1: Nee.

S1 wehrt sich dagegen, dass S2 die Volumeneinheit bei der Dichte in cm umwandelt, da dann die Bedeutung des Verhältnisses der Einheiten nicht mehr die korrekte Einheit der Dichte repräsentiert. S1 sieht in dem Verhältnis der Einheiten weiterhin einen Zusammenhang: als Verhältnis stellen diese Einheiten die Einheit der Dichte dar und dieser Zusammenhang muss erhalten bleiben.

b. Starres Verhältnis

Größen in einer Gleichung hängen in einem starren Verhältnis zusammen. Das bedeutet, dass Größen, die im Verhältnis zueinander stehen, sich nicht unabhängig voneinander ändern können. Wenn die Größe im Nenner zunimmt, muss auch der Zähler zunehmen, „da sie im Verhältnis zueinander stehen“.

Anschaulich wird diese Vorstellung in folgender Aussage eines Schülers:

> S1: Weil wir haben ja gerade gesagt, dass Weg und Zeit zueinander im Verhältnis stehen. Dann kann ja jetzt nicht plötzlich passieren, dass der Weg mehr wird und die Zeit bleibt gleich. Das widerspricht ja schon wieder einer Aussage die wir hatten.

Der Schüler sieht in dem Zusammenhang von Weg und Zeit als Verhältnis den Grund dafür, dass sich beide nicht unabhängig voneinander ändern dürfen. Man könnte auch sagen, dass der Schüler implizit die Annahme $s/t = konstant$ gemacht hat. Diese Beziehung ist allerdings nur in Spezialfällen gültig, weshalb eine Generalisierung dieser Annahme problematisch ist.

9.1.2. Problematische Vorstellungen zur Bedeutung eines Produktes zweier physikalischer Größen

Der mathematischen Struktur des Produktes zweier Größen werden — wie bei dem Verhältnis — Bedeutungen zugeschrieben, die auf einen Zusammenhang der beiden Größen hindeuten. Dabei lassen sich zwei Problemkategorien unterscheiden. Die erste zeigt eine unspezifische Vorstellung von Zusammenhang auf, während die zweite den

Grund des Zusammenhangs im Bezug zum gleichen physikalischen Körper erkennen lässt.

a. Die Größen hängen zusammen

Es besteht die Vorstellung, dass zwei Größen, die multipliziert werden, zusammenhängen. Es lässt sich allerdings nicht erkennen, worin der Grund für den Zusammenhang gesehen wird.

Bei der Aufgabe „Luftwiderstand“ hat eine Gruppe die Formel $a = \frac{A \cdot m}{\rho \cdot v^2}$ aufgestellt und diskutiert anschließend darüber.

> S1: Aber wieso ist...na jetzt die Frage, wieso hängt der Querschnitt mit der Masse zusammen? ...Und ist nicht einzeln?

Der Schüler sieht die Multiplikation von A (Querschnitt) und m (Masse) als einen Ausdruck für einen Zusammenhang beider Größen an. Er betrachtet die Gleichung nicht als Ausdruck für die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von diesen beiden Größen, sondern sieht auch die Multiplikation als einen Ausdruck gegenseitiger Abhängigkeit an. Mit der Frage „Und ist nicht einzeln?“ deutet er an, dass er eine räumliche Trennung — möglicherweise durch eine Addition — zwischen beiden Größen für angemessen hält, da er keinen Zusammenhang erkennen kann.

b. Die physikalischen Größen müssen sich auf den gleichen Körper beziehen

Diese Vorstellung drückt ebenfalls einen Zusammenhang von Größen aus, die miteinander multipliziert werden. Allerdings lässt sich in diesem Fall der Grund für den Zusammenhang erkennen: Größen, die sich auf unterschiedliche Dinge — physikalische Körper — beziehen, können nicht zusammenhängen. Multiplikativ zusammenhängende Größen müssen einen gemeinsamen Bezug aufweisen.

In dem folgenden Dialog diskutiert eine Gruppe über das Einbringen der Dichte der Luft und der Masse in die Formel für den Luftwiderstand. S1 schlägt eine Multiplikation vor, aber S2 interveniert. In den ersten beiden Aussagen ist die Kategorie des unspezifischen Zusammenhangs (9.1.2.a) zu erkennen, die im weiteren Verlauf dann spezifiziert wird.

> S1: Ich glaub das könnte mit dem zusammenhängen und das mit dem.
>
> S2: Und wie machen wir das mit dem zusammen? Meinst p m mal...

> S1: Wieso? Ich hätte da...p m kannst ja...
>
> S2: Äh, ρ m
>
> S1: ...kannst ja gar nicht zusammen machen. Denn das ist ja Masse des Körpers und das andere ist Dichte der Luft, das hat ja mit Luft zu tun...und ich bin im Masse des Körpers.

S1 äußert Bedenken, ρ und m zu multiplizieren, da sich die Größen auf unterschiedliche Dinge beziehen: Die Dichte der Luft bezieht sich auf die Luft, während die Masse zum fallenden Körper gehört. Aus diesem Grund sieht S1 ein Problem darin, dass beide Größen zusammenhängen. Verbunden mit der Vorstellung 9.1.2.a, dass eine Multiplikation einen Zusammenhang ausdrückt, gelangt er zu dem Schluss, dass ρ und m nicht miteinander multipliziert werden sollten.

9.1.3. Problematische Vorstellungen zum Ausdruck von Wichtigkeit in mathematischen Strukturen

In diesem Problemfeld sind Vorstellungen im Zusammenhang mit Wichtigkeit oder Gewichtung enthalten. Die Schüler sehen in bestimmten mathematischen Strukturen Hinweise für die Wichtigkeit von Termen oder Größen. Die erste Kategorie bezieht sich auf eine diffuse Vorstellung von wichtigen Positionen, die zweite zeigt Vorstellungen zur Gewichtung von direkter und indirekter Proportionalität und die dritte nimmt die Kommutativität in einer Summe als Zeichen für gleiches Gewicht.

a. Wichtige Position

Es besteht generell die diffuse Vorstellung, dass es wichtige und unwichtige Positionen in einer Gleichung gibt. Die Spezifizierung der mathematischen Strukturen, die Wichtigkeit oder Unwichtigkeit ausdrücken, sind jedoch nicht ersichtlich.

In folgendem Beispiel zeigt sich diese Vorstellung explizit:

> S1: Ah, na richtig, da ... da zum Beispiel ... ähh, die Zeit eine wichtige Position in der Gleichung einnimmt oder so! (lacht) Eine ausschlaggebende Position.
>
> S2: Jeder Teil ist in der Gleichung wichtig, sonst könnt er weggelassen werden. (lacht)

S1 schlägt zur Begründung der vierten Teilaufgabe der Aufgabe „Phantasie-Universum“ vor, dass die Zeit eine wichtige bzw. ausschlaggebende Position in der Gleichung einnimmt. Zwar fällt auf, dass er lacht, was darauf hindeutet, dass ihm bewusst ist, dass es nicht ganz korrekt oder komisch ist, was er sagt. Allerdings zeigt die Äußerung dennoch, dass er gewisse Positionen mit Wichtigkeit in Verbindung bringt.

b. Direkt proportional ist wichtiger

Bei dieser Vorstellung wird die Idee von Wichtigkeit deutlicher spezifiziert: es zeigt sich eine Gewichtung von direkter und indirekter Proportionalität. Dabei wird eine direkt proportionale Abhängigkeit als wichtiger erachtet als eine indirekt proportionale. In folgendem Beispiel kommt diese Vorstellung explizit zum Ausdruck:

> S1: Quadrat der Geschwindigkeit...ich glaub, das ist nicht so wichtig...also das ist indirekt

Der Schüler überlegt bei der Aufgabe Luftwiderstand, welchen Einfluss die Größen haben und trifft seine Entscheidung in Bezug zur Proportionalität danach, welche Größe „wichtiger“ sei. Vermutlich meint er mit Wichtigkeit den Einfluss bzw. den Effekt, den die Geschwindigkeit auf die Größe des Luftwiderstandes hat.

c. Kommutativität einer Summe

Die Kommutativität einer Summe wird mit dem Einfluss der Terme bzw. dem Gewicht in Zusammenhang gebracht. Da die Terme kommutieren, also ihre Reihenfolge beliebig ist, müssten sie demnach gleich viel Gewicht haben.

Zur zweiten Frage bei der Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“ nach dem Einfluss der Terme in der Formel $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$ überlegt ein Schüler:

> S1: Wenn man das jetzt von der Struktur betrachten würde ist das doch alles gleich viel. Du kannst es ja auch verdrehen. Du kannst ja auch v_0t plus $\frac{1}{2}at^2$ plus s_0 schreiben. Also hat das nicht alles eigentlich gleich viel Gewicht?

Der Fakt der Kommutativität der Terme in der Summe wird von dem Schüler so interpretiert, dass alle Terme das gleiche Gewicht haben. Es scheint die Vorstellung zu bestehen, dass durch die Position oder Reihenfolge eine Gewichtung ausgedrückt wird, die in diesem Fall allerdings nicht vorhanden ist, da die Reihenfolge beliebig ist.

9.1.4. Probleme beim Mathematisieren von Proportionalität

Bei diesen Problemen bereitet das Mathematisieren proportionalen physikalischen Verhaltens Schwierigkeiten. Auf einer grundsätzlichen elementaren Ebene haben die Schüler Probleme damit, proportionale Zusammenhänge weiter zu mathematisieren. Die erste Kategorie beinhaltet ein generelles Unverständnis für das Übertragen in eine Gleichung, die zweite Kategorie bezieht sich auf die Auswahl der passenden Operation — die Multiplikation.

a. Proportionalität in Gleichung übertragen

Die Schüler erkennen proportionale und indirekt proportionale Zusammenhänge, können diese aber nicht in einer Gleichung ausdrücken. Es besteht ein generelles Unverständnis dafür, wie die Proportionalitäten mathematisch beschrieben werden können.

Bei der Aufgabe „Luftwiderstand" hat zum Beispiel eine Gruppe alle Abhängigkeiten der vier physikalischen Größen diskutiert und versucht diese nun in die Gleichung für den Luftwiderstand zu übertragen. Dabei wissen sie jedoch nicht, was ihnen die Proportionalität dafür aussagt.

> S1: Also...Luft...gleich...(lacht) gleich... (schreibt $a_{luft} =$)
>
> S2: Gleich, ok, na wenn, hilft uns die direkte Proportionalität oder ähnliches bei einer Gleichung?
>
> S1: Weiß nicht...Masse durch...nee...Masse des Körpers...

Im weiteren Verlauf weichen die Schüler aufgrund dieser Problematik darauf aus, die Gleichung durch ein schematisch-technisches Vorgehen aufzustellen.

b. Proportionalität mit mathematischer Operation verknüpfen

Bei diesem Problem bezüglich des Mathematisierens der Proportionalität besteht ähnlich wie bei 9.1.4.a grundsätzlich ein Unverständnis zum Zusammenhang von Proportionalität und der angemessenen mathematischen Repräsentation. Es wird allerdings deutlich, dass es sich um die Auswahl der passenden mathematischen Operation — der Multiplikation — handelt, dessen Auswahl zum Mathematisieren für die Schüler nicht ersichtlich ist.

In dem folgenden Zitat wird diese Problematik explizit geäußert:

> S1: Mir fehlt irgendwie die Begründung, warum ich das mit ner Multiplikation ab-, in Abhängigkeit bringen soll.... Oder warum ich das genau in dieser Form in Abhängigkeit bringen soll. Das fehlt mir grade.

Der Schüler weiß bei der Aufgabe „Luftwiderstand“ nicht, weshalb er die verschiedenen Größen, von denen der Luftwiderstand abhängt, mit einer Multiplikation verbinden soll. Er benennt allerdings auch keine Alternative.

Bei einer anderen Gruppe zeigt sich das Problem der Mathematisierung mittels Multiplikation darin, dass diese Gruppe auch einen additiven Beitrag in die Formel zum Luftwiderstand einbaut. Aufgrund einer generellen Problematik, das physikalische Verhalten in Bezug zu einer negativen Beschleunigung zu setzen, gehen die Schüler dazu über, die Formel zu raten und benutzen dabei sowohl eine Addition als auch eine Multiplikation. Der Unterschied in den Grundvorstellungen bei Addition und Multiplikation scheint den Schülern nicht bewusst zu sein. In diesem Sinne schreiben sie einmal $a = \rho + A +$ und danach $a = \rho + \frac{A}{m} \cdot v^2$.

9.1.5. Probleme mit der Verwendung des neutralen Elements 0 oder 1

Bei diesem Problemfeld bestehen Schwierigkeiten mit der Bedeutung und Verwendung des neutralen Elements. Insbesondere die Bedeutung der 0 stellt für die Schüler eine ungewohnte Besonderheit dar, wie sich in den ersten beiden Kategorien zeigt. Bei der dritten Problemkategorie scheint die Unterscheidung zwischen der 1 als neutralem Element der Multiplikation und der 0 als neutralem Element der Addition den Schülern nicht bewusst zu sein.

a. Unbehagen mit Null

Die Mathematisierung eines Vorganges, der Ruhe — d.h. keine Bewegung — ausdrückt und daher mit einer Null beschrieben wird, bereitet den Schülern Unbehagen. Die Null scheint eine Art Sonderstellung zu haben und eher so aufgefasst zu werden, als beziehe sie sich auf nicht existente Dinge, als würde durch den Wert der Null eine Auslöschung geschehen. Auch die aus dem Mathematikunterricht bekannte Regel „Division durch Null geht nicht!“ betont die Sonderstellung der Null und trägt zum Unbehagen bei.

In dem folgenden Beispiel zum zweiten Aufgabenteil der Aufgabe „Zwei Massen“ drückt ein Schüler explizit seine Skepsis gegenüber der Null aus. Es geht um den Fall, dass die hängende Masse vernachlässigt werden soll. Dies führt dazu, dass keine Bewegung stattfindet und die Beschleunigung demnach den Wert Null annimmt. Diese Schlussfolgerung macht auch der Schüler, allerdings lehnt er sie daraufhin ab.

> S1: Ich meine wenn eine Null kommen würde, würde die Beschleunigung, ähh Fallbeschleunigung Null sein. Ähh, ich mein die Beschleunigung. Das kann nicht sein.

Die Erkenntnis, dass die Beschleunigung Null wird, führt nicht zu der Interpretation von Ruhe, sondern wird als Hinweis auf einen Fehler gewertet. Der Wert Null erhält eine Sonderstellung, die nicht mit physikalischem Verhalten in Verbindung gebracht wird.

In den folgenden beiden Beispielen zeigt sich das Unbehagen eher subtil. Die Schüler haben bereits in dem ersten Aufgabenteil die oben liegende Masse ohne Probleme vernachlässigt und Null gesetzt. Im zweiten Aufgabenteil würde das Nullsetzen der Masse jedoch dazu führen, dass keine Bewegung stattfindet, was den Schülern komisch vorkommt.

> S1: Gehen wir jetzt bei der...bei b) auch wieder von Null aus, für...klein m? Weil dann wird sich M überhaupt nicht bewegen.
>
> S2: Hmm, das stimmt natürlich.

Die Schüler lehnen die Mathematisierung mit der Null zwar nicht ab, in ihrem Zögern und Nachdenken zeigt sich jedoch ein Unbehagen, das bei der ersten Teilaufgabe nicht vorhanden war. Bei einer anderen Gruppe lässt sich das gedankliche Ringen mit der Null und ihrer Bedeutung erkennen. Bei der Überlegung, ob ihre Ergebnisse sinnvoll sind, wird der Fall $a = 0$ zuerst abgelehnt, dann jedoch noch einmal in Bezug zur Bedeutung gesetzt:

> S1: Nee, denk ich nicht dass die jetzt gerade sinnvoll sind. weil du kannst keine...
>
> S2: ... kannst keine Fall... kannst nicht Null nehmen, aber warte mal ... anhand der Formel wie groß die Beschleunigung beider Körper ist, wenn die Masse m des hängenden Körpers... hmm, wenn die Null ist, dann gibt's keine Beschleunigung.

b. Null wird implizit mathematisiert

Dieses Problem hängt ebenfalls mit der Mathematisierung mit einer Null zusammen. In diesem Fall zeigt sich die Sonderrolle der Null jedoch nicht in einem Unbehagen, sondern in der impliziten Mathematisierung der Null. Das bedeutet, dass die Null nicht explizit aufgeschrieben wird. Eine Situation, die mit einer Null mathematisiert werden müsste, wird zwar korrekt behandelt, allerdings wird die Mathematisierung mit einer Null umgangen.

Zum Beispiel bezeichnet eine Gruppe bei der ersten Teilaufgabe der Aufgabe „Zwei Massen“ die Vernachlässigung der liegenden Masse als „egal“. Zur Begründung ihres Ergebnisses $a = g$ sagen sie:

> S1: Na nee, begründen wir gleich, ähm...weil m durch m gleich Eins und groß M egal ist. So ähm...(schreibt: weil m/m=1 und M egal ist)

Die Schüler haben mathematisch so gearbeitet, wie es im Fall $M = 0$ korrekt ist, allerdings sagen sie es nicht und schreiben es auch nicht auf. Stattdessen sprechen sie von „Groß M egal“ und schreiben es so an die Tafel. Insbesondere im Vergleich zur mathematisch korrekten Begründung der wegfallenden Massen „$m/m = 1$“ wird ersichtlich, dass die Null gesondert behandelt wird.

c. Vermischung von 0 und 1

Bei diesem Problem ist den Schülern der Unterschied zwischen den neutralen Elementen 0 und 1 nicht klar. Beide Zahlen scheinen die Bedeutung „Nichts“ zu haben, die jeweils spezifische Verknüpfung mit einer mathematischen Operation ist den Schülern nicht bewusst.

Im folgenden Beispiel zur Aufgabe „Zwei Massen“ weiß der Schüler nicht, ob er vernachlässigen mit einer Eins oder einer Null mathematisieren soll.

> S1: Und dann steht dann ja noch die Masse m kann vernachlässigt werden... also ist vernachlässigbar klein. Also ist sie Eins oder Null oder sowas. Naja wenn, dann kann man sie eigentlich auch vernachlässigen.

Noch gravierender wird die Unsicherheit an einer anderen Stelle bei S2 deutlich:

> S2: Eins durch m. Na da ist ja gar nichts mehr oben. Da ist ja nicht mal Null. Da ist ja nichts... Das ist mal, mal g.

> S1: Aber eins meint ja Nichts... also nicht aber...

S2 möchte ausdrücken, dass über dem Bruchstrich nichts mehr steht, und dafür erscheint ihm sogar eine Null als zu viel. S1 widerspricht und zeigt immerhin ein Bewusstsein dafür, dass das „Nichts“ durch eine Zahl ausgedrückt wird, allerdings bestätigt er durch die Bezeichnung der Eins als „Nichts“, dass auch ihm eine sichere Verwendung der neutralen Elemente nicht geläufig ist.

9.1.6. Probleme mit dem Konzept der Änderungsrate und zugehörigen mathematischen Strukturen

Das Konzept der zeitlichen Änderungsrate einer Größe wird mit unpassenden mathematischen Strukturen verbunden. Es zeigt sich, dass die Schüler die in Kapitel 3.3 diskutierte duale Natur von Geschwindigkeit und Beschleunigung als zugleich physikalisches und mathematisches Konzept nicht verstanden haben. Für die Schüler gehört zur Beschreibung einer Rate nicht zwangsweise die mathematische Struktur eines Bruches mit der Zeit im Nenner. Auch der Zusammenhang von der Multiplikation der Rate mit der Zeit als Ausdruck für die Zunahme der geänderten Größe scheint den Schülern nicht bewusst zu sein.

a. Konstante als konstante Zunahme

Eine Konstante wird als (konstante) Zunahme einer Größe angesehen. Bei der Interpretation der Bedeutung der Formel zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung sehen die Schüler die Konstante s_0 als die Zunahme des Weges an.

In dem folgenden Beispiel diskutiert eine Gruppe über die Bedeutung von s_0. Sie bezeichnet s_0 zwar auch als s „O“, da sie das Symbol s_0 nicht kennt, an der eigentlichen Problematik ändert das aber nichts. Die Idee der Schüler ist, dass sich aufgrund der beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeit ändert, was dazu führt, dass bei größerer Geschwindigkeit auch immer mehr Weg zurückgelegt wird. Dieser zusätzlich hinzukommende Weg würde durch das s_0 ausgedrückt.

> S1: Vielleicht ist das genauso wie, also wenn wir das hier sagen, die Geschwindigkeit nimmt so und so so viel zu, dass das mit plus s „O“ ist, wenn das gleichmäßig die Geschwindigkeit schneller wird, ne?

S2: Ja.

S1: Dann tut es ja in dieser gewissen Zeit gleichzeitig mehr, immer mehr Weg in der Zeit zurücklegen, oder? Ich meine am Anfang sind wir langsam...

Und etwas später:

S1: Ne s(t) ist ja wenn man sagt, ich starte von Punkt 1 bis irgendwo hin. Da hast du ja dieses ganzen Abschnittsding, ist ja s mit t (S1 zeichnet Zahlenstrahl mit 1 am Anfang und bezeichnet ihn mit s(t))

S2: Genau.

S1: Und was ich jetzt meinte ist, man sagt ja hier ist v_1 und dann v_2,weil es ja immer schneller wird.

S2: Ja, mit einer gleichmäßigen Geschwindigkeit.

S1: Beschleunigung.

S2: Ja, meinte ich doch.

S1: Und wenn du dann, ich meine für diesen ersten Wegabschnitt, ne? Da ist ja eine gewisse Geschwindigkeit und du brauchst für den eine gewisse Zeit, aber dann bist du ja wieder schneller, das heißt du schaffst in einer gewissen Zeit die du für den ersten Abschnitt brauchst schon viel mehr Weg. Verstehst du was ich meine?

S2: Ja.

S1: Mehr Weg schaffst du ja und weil auch die Geschwindigkeit konstant größer wird, legt man ja auch konstant mehr Weg zu in einer gewissen Zeit, oder?

Bei dieser Gruppe beschreibt s_0 das Konzept der Änderung des Weges aufgrund der Beschleunigung. Dass genau diese Änderung durch den Term $at^2/2$ ausgedrückt wird und zwingender Weise aus einer Rate mal der Zeit — in diesem Fall sogar die doppelte Änderungsrate mal der Zeit ins Quadrat — bestehen muss, ist diesen Schülern offensichtlich nicht klar.

Selbst wenn die Schüler aus ihrem Unterricht nur den Term $at^2/2$ kennen und das Symbol s_0 unbekannt ist, könnte diesem Problem begegnet werden. Wenn die Schüler im Unterricht ein Verständnis für die Änderungsraten und die passenden mathematischen Strukturen erlangen und dies in Verbindung zu den physikalischen Formeln bringen würden, dann dürfte die Idee von s_0 als Zunahme des Weges aufgrund der Beschleunigung bei den Schülern nicht entstehen — auch bei Unkenntnis des Symbols s_0.

b. Unterschied zwischen Beschleunigung und Änderungsrate der Geschwindigkeit

Die Beschleunigung wird mathematisch nicht als Änderungsrate der Geschwindigkeit gesehen. Es besteht zwar schon die Vorstellung, dass die Beschleunigung auf eine Änderung der Geschwindigkeit verweist, allerdings wird dies nicht in der mathematischen Struktur gesehen. Es scheint eher so, als ob die Beschleunigung nur begrifflich ein Ausdruck für Geschwindigkeitsänderung darstellt, der Zusammenhang zu einer entsprechenden mathematischen Repräsentation wird nicht hergestellt.

In diesem Sinne sieht die folgende Gruppe in dem Term $v_0 \cdot t$ die Zunahme der Geschwindigkeit, und dementsprechend v_0 als Änderungsrate. Aufgrund der beschleunigten Bewegung erscheint den Schülern diese Annahme plausibel, da Beschleunigung eine Änderung der Geschwindigkeit bedeute. Der Zusammenhang zu der passenden mathematischen Repräsentation $v = at$ wird von den Schülern nicht hergestellt.

> S1: Na dann müsste man ja den im Ganzen, den im Ganzen und den im Ganzen nehmen, oder? ... Also ich würde schon sagen, dass dieses v-Kringel mal t diese Geschwindigkeit (sagen beide gleichzeitig) ist, die jetzt halt dazu kommt.
>
> S2: Genau!
>
> S1: Die symbolisiert halt, dass das halt, die nimmt ja konstant zu, gleichmäßig zu, wegen der gleichmäßigen Beschleunigung.
>
> S2: Mhh. (zustimmend)
>
> S1: Genau, und die zeigt halt in welchem Zeitverhältnis der Körper um wie viel schneller wird.

Es ist anzunehmen, dass S1 das „die“ in den letzten beiden Äußerungen auf v_0 bezieht. S1 bezeichnet daher v_0 als das Zeitverhältnis, das angibt, um wie viel schneller der Körper wird. Insofern ist die grundlegende mathematische Struktur für die Zunahme der Geschwindigkeit als Änderungsrate mal Zeit zu dem Term $v_0 t$ passend, allerdings erkennt S1 nicht, dass er das Konzept der Beschleunigung beschrieben hat und demnach $v_0 = a$ sein müsste.

Als weiteres Problem ist zu bemerken, dass die Struktur der Gleichung als Funktion, in der alle Terme einen Beitrag zu dem Funktionswert liefern, von den Schülern verletzt wird. Alle Terme liefern einen Beitrag zu $s(t)$, weshalb $v_0 t$ ebenfalls eine Strecke repräsentieren muss und nicht die Zunahme der Geschwindigkeit darstellen kann. Aus diesem Grund ist dieses Beispiel auch in der entsprechenden Kategorie 9.1.7.d zu verorten.

9.1.7. Nichtbeachtung der Eigenschaften einer Funktion

Die Eigenschaften einer mathematischen Funktion werden in einer mathematischen Struktur nicht beachtet. Eine physikalische Gleichung kann eine mathematische Funktion darstellen: Eine physikalische Größe repräsentiert den Funktionswert, der sich in Abhängigkeit von einer anderen Größe ändert, die damit die Rolle der Funktionsvariablen einnimmt. Zudem gibt es weitere physikalische Größen, die als Parameter fungieren. Diese Strukturen werden von den Schülern nicht beachtet, weshalb es zu Verständnisproblemen beim Interpretieren der Gleichung kommt.

a. Unverständnis zur Bedeutung eines konstanten Funktionsterms

Die Bedeutung eines konstanten Summanden in einer Funktion wird nicht verstanden, da er nicht von der Variablen abhängt. Er wird als von der restlichen Gleichung losgelöst angesehen.

In dem folgenden Beispiel diskutiert eine Gruppe über die Bedeutung von s_0 in der Gleichung zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Da s_0 unabhängig von der Zeit ist, wird es als nicht zum Rest zugehörig angesehen.

> S1: Aber der dritte Summand hat doch gar nichts damit zu tun, oder? Da ist ja gar kein t drin.
>
> S2: Eigentlich nicht, da hast du recht, denk ich.
>
> S1: Ja.
>
> S2: Vor allem, wenn wir den Weg ausrechnen wollen in Abhängigkeit von der Zeit und dann rechnen wir das noch plus s_0 was ja nochmal der Weg ist.

Zudem kommt für S2 erschwerend hinzu, dass sich s_0 als konstanter Summand in der Funktion auf die gleiche physikalische Größe wie der Funktionswert bezieht. Hier zeigt sich implizit die Vorstellung von unterschiedlichen Bedeutungen der Funktionsterme (9.1.7.d).

b. Abhängigkeit des Parameters vom Funktionswert

Es wird der Einfluss eines Funktionswertes auf einen Parameter betrachtet. Eine physikalische Größe, die eigentlich als Parameter fungiert, nimmt die Rolle eines Funktionswertes an und der Funktionswert wird zum Parameter. Dadurch wird die Abhängigkeit umgekehrt und es tritt Verwirrung auf.

Bei der Aufgabe „Luftwiderstand" betrachtet eine Gruppe den Einfluss der Dichte der Luft.

> S1: Also die Dichte steht proportional dazu...das müsste so sein.
>
> S2: Also die Dichte nimmt zu.
>
> S1: Dann wird der Körper langsamer
>
> S2: ...wenn die Beschleunigung... Wieso nimmt die Dichte zu, wenn die Beschleunigung zunimmt?

Die Aussage von S1, dass die Dichte proportional zum Luftwiderstand sei, deutet bereits eine Abhängigkeit der Dichte von dem Luftwiderstand an, obwohl bei der zweiten Aussage von S1 deutlich wird, dass S1 den Einfluss auf den Körper meint. S2 allerdings scheint die Dichte als beeinflusst zu begreifen, wie es aus der Äußerung, dass die Dichte zunehme, ersichtlich wird. Die Verwirrung kommt im letzten Satz zum Ausdruck, als S2 nicht versteht, weshalb die Dichte durch die Beschleunigung beeinflusst werden sollte.

c. Keine Differenzierung zwischen Funktionsvariable und Parameter

Die Unterscheidung der mathematischen Rollen physikalischer Größen als Funktionsvariable oder Parameter bzw. Konstante wird nicht beachtet. Dadurch werden verschiedene Terme in einer Funktionsgleichung miteinander identifiziert.

Bei der Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung" wird der Term v_0t mit s_0 identifiziert. Beide Summanden werden als Ausdruck ein und derselben Sache angesehen, ohne dabei zu beachten, dass die Zeit keine feste Größe, sondern die Funktionsvariable ist.

> S1: Also v_0 mal t ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt null mal die bereits verstrichene Zeit? Das würde ja den schon bereits zurückgelegten Weg ergeben und das ist ja s_0. Also wenn wir zweimal s_0...

S1 sieht die Zeit t als bereits verstrichene Zeit an, so dass die Gleichsetzung von v_0t und s_0 plausibel wird. Allerdings wird diese Bedeutung der Zeit beim ersten Term $at^2/2$ nicht gesehen, so dass ein Bedeutungswechsel von t eintritt. Dies ist mit der mathematischen Rolle als Funktionsvariable eigentlich nicht zu vereinbaren.

d. Unterschiedliche Bedeutungen von Funktionstermen

Verschiedenen Summanden in einer Funktion wird eine unterschiedliche Bedeutung zugeschrieben. Der Zusammenhang, dass alle Summanden einen Ausdruck für die gleiche physikalische Größe darstellen, ist den Schülern nicht bewusst. Auch der Widerspruch zu einer möglichen Einheitenrechnung wird nicht erkannt.

Das folgende Beispiel ist bereits bei dem Problem zum Unterschied zwischen Beschleunigung und Änderungsrate der Geschwindigkeit (9.1.6.b) aufgeführt. Es zeigt sich allerdings, dass dies nicht das einzige Problem in diesem Diskussionsausschnitt darstellt, sondern dass ebenfalls den Funktionstermen eine unterschiedliche Bedeutung zugeschrieben wird.

> S1: Na dann müsste man ja den im Ganzen, den im Ganzen und den im Ganzen nehmen, oder? ... Also ich würd schon sagen das dieses v-Kringel mal t diese Geschwindigkeit(sagen beide gleichzeitig) ist die jetzt halt dazu kommt.
>
> S2: Genau!
>
> S1: Die symbolisiert halt, dass das halt, die nimmt ja konstant zu, gleichmäßig zu, wegen der gleichmäßigen Beschleunigung.
>
> S2: Mhh. (zustimmend)
>
> S1: Genau, und die zeigt halt in welchem Zeitverhältnis der Körper um wie viel schneller wird.

In diesem Fall beschreibt der zweite Term die Zunahme der Geschwindigkeit, obwohl es ein Beitrag zur Strecke $s(t)$ ist. An diesem Beispiel lässt sich gut ersehen, dass auch mehr als ein Problem im Verständnis der Schüler vorhanden sein kann. In diesem Dialog ist die unterschiedliche Bedeutung der Funktionsterme vielleicht das nachrangige Problem. Trotzdem müsste — oder könnte — einem Schüler, der den Zusammenhang von Bedeutung und mathematischer Struktur verstanden hat, dieser Widerspruch auffallen.

9.1.8. Auffassung eines Produktes als Funktion

Bei diesem Problemfeld wird die Bedeutung eines Produktes physikalischer Größen als ein Ausdruck für einen der Faktoren aufgefasst oder die Faktoren werden als voneinander abhängig angesehen. Damit zeigen sich Vorstellungen, die dem Produkt die Rolle einer mathematischen Funktion zuschreiben.

Als Einschränkung ist zu erwähnen, dass bei den ersten vier Kategorien dieses Problemfeldes ein Faktor des Produktes durch die Zeit t repräsentiert wird. Dieser Aspekt kann unwesentlich für die entsprechenden Vorstellungen sein, er kann aber auch eine notwendige Bedingung darstellen. Daher wird die Zeit explizit in den Problemen benannt, eine eventuelle Generalisierung auf Produkte ohne die Zeit als Faktor kann an dieser Stelle nicht mit Sicherheit vollzogen werden.

Weiterhin ist zu bemerken, dass bei den ersten drei Vorstellungen dieses Problemfeldes zusätzlich automatisch ein weiteres Problem auftritt, wenn der Produktterm einen Summanden in einer Funktion darstellt. In diesem Fall ist gleichzeitig auch das Problem der unterschiedlichen Bedeutung von Funktionstermen vorhanden (9.1.7.d).

a. Größe mal Zeit ist: Größe in Abhängigkeit von der Zeit

Der Term $A \cdot t^n$ ($n = 1$ oder $n = 2$) wird als $A(t)$, also als Ausdruck für die Größe A in Abhängigkeit von der Zeit aufgefasst. Dies kann unter anderem dazu führen, dass die Größe A als zeitlich veränderlich angesehen wird.

Teilweise wird diese Bedeutung explizit geäußert in Aussagen wie „Das erste ist natürlich die Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit.“ bei der Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“. Die Konsequenzen, die aus dieser Auffassung entstehen, werden von einem Schüler deutlich geäußert, als er sich auf den Term $v_0 t$ bezieht:

> S1: Bei dem ist es ja, die sind ja in Abhängigkeit von der Zeit, das heißt hier wächst das pro Sekunde die Geschwindigkeit, ist ja klar...

Aus der Abhängigkeit von der Zeit zieht S1 den Schluss, dass sich die Geschwindigkeit zeitlich ändert. Damit sind ebenfalls die Probleme 9.1.6.b und 9.1.7.d vorhanden.

Die Vorstellung, dass $A \cdot t^n$ die physikalische Größe A in Abhängigkeit von der Zeit darstellt, existiert allerdings auch implizit und wird in resultierenden Problemen deutlich. Im folgenden Beispiel zur Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“ erkennt ein Schüler, dass die Beschleunigung aufgrund der gleichmäßig beschleunigten Bewegung konstant ist. Im Zusammenhang mit der Vorstellung, dass der Term $at^2/2$ die Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit darstellt, folgt daraus, dass sich dieser Term nicht ändert.

> S1: Aber wenn es stimmt, dass du hier behauptest, dass die Beschleunigung sich in dem Sinne sich nicht ändert, wenn wir gleichmäßig beschleunigen. Dann hat wie du richtig feststelltest t nicht so viel Einfluss, obwohl es quadratisch ist. Das heißt es bleibt nur Summand Nummer zwei übrig, weil da hätte es einen Einfluss.

Der Schüler erkennt die quadratische Abhängigkeit des Terms von der Zeit t, zieht jedoch trotzdem die Schlussfolgerung, dass der Term einen geringen Einfluss hat. Die Vorstellung, dass dieser Term die Beschleunigung repräsentiere, ist so dominant, dass dadurch das Wissen um die Konstanz der Beschleunigung die mathematische Struktur überlagert. Damit tritt hier auch die später diskutierte Problematik der Determinierung der Mathematik durch die Physik (9.4.2) zutage.

b. Größe mal Zeit ist: Formel für die Größe

Der Term $A \cdot t^n$ wird als Formel für die Größe A aufgefasst. In der Aussage „Das zweite (ist) eigentlich eine Formel für die Geschwindigkeit.“ wird diese Ansicht explizit geäußert. Im Prinzip ist bei dieser Vorstellung eine große Nähe zu der obigen Vorstellung „Größe in Abhängigkeit von der Zeit“ zu erkennen. Allerdings ist die Vorstellung „Formel für die Größe“ etwas allgemeiner gefasst, so dass sie als eigene Vorstellung Erwähnung findet.

In diesem Sinne findet sich die Vorstellung „Formel für Größe“ eher implizit darin, wenn gesagt wird, dass der Term nicht Null sein kann, da die Größe einen Wert hat, oder dass der Term sich nicht ändern kann, da die Größe sich nicht ändert. In dem folgenden Beispiel diskutiert eine Gruppe über den Einfluss des ersten Terms der Gleichung zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung. S2 hat bereits gesagt, dass der Term am Anfang Null ist, S1 widerspricht jedoch.

S1: Nein, aber die Beschleunigung ist doch, wenn er fährt, auch wenn hier gemessen wird ist die doch schon...hat die doch schon einen Wert

S2: Ja, aber...(unverständlich)

S1: ...hier ist sie ja trotzdem nicht null.

Laut der Argumentation von S1 kann der Term $at^2/2$ auch zu Beginn nicht Null sein, da die Beschleunigung dann schon einen Wert hat. Das zeigt, dass S1 den Term als Ausdruck oder Formel für die Beschleunigung ansieht.

c. Größe mal Zeit ist: Zeit der Größe

Der Term $A \cdot t^n$ stellt die Zeit bzw. Dauer des Zustandes dar, der durch die Größe beschrieben wird. So bezieht sich ein Schüler auf den ersten Term der Formel zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung und äußert dessen Bedeutung als Zeit zum Beschleunigen:

S1: $a\ t$ würde ich sagen ist die Zeit die man zum Beschleunigen braucht. Eigentlich schon, oder? ...Doch...Doch, doch.

Eine andere Gruppe interpretiert v_0 als Ruhezustand, so dass $v_0 t$ als Dauer der Ruhe verstanden wird:

S1: Dann ist v_0... der Ruhezustand mit der Zeit?

S2: Naja die Zeit ist dann ja auch nichts.

S1: Na, aber du kannst ja zum Beispiel 10 Sekunden lang stehen.

d. Größe mal Zeit ist: Zeit des Ergebnisses

Der Term $A \cdot t$ beschreibt die Dauer bzw. Zeit der Größe, die durch $A \cdot t$ ausgedrückt wird. Zum Beispiel wird $v_0 t$ als „Strecke, wie lange die Anfangsgeschwindigkeit ist“ interpretiert. Bei dieser Vorstellung ist eine Nähe zu der vorigen Vorstellung der „Dauer der Größe“ vorhanden, allerdings tritt in diesem Fall nicht zusätzlich das Problem der unterschiedlichen Bedeutung von Funktionstermen auf (9.1.7.d.), da $v_0 t$ als Ausdruck für die Strecke verstanden wird.

e. Gegenseitige Beeinflussung der Faktoren

Ein Faktor des Produktes beeinflusst den anderen Faktor. Dadurch hat eine Größenänderung des einen Faktors eine Größenänderung des anderen zur Folge.

Zum Beispiel betrachtet eine Gruppe bei der Aufgabe „Zwei Massen“ für den zweiten Fall, bei dem die hängende Masse m vernachlässigt wird, auch den Einfluss der liegenden Masse M. Sie nehmen deshalb eine Fallunterscheidung vor und betrachten die Größe des Bruches in dem Ausdruck $\frac{m}{m+M} \cdot g$ für die beiden Fälle, dass M groß oder klein ist.

> S1: Es hängt davon ab, wie jetzt M ist, wenn jetzt das große M groß ist, dann wird's ein ganz kleiner Bruch.
>
> S2: Hmm.
>
> S1: Dann wird das g auch ganz klein.
>
> S2: Und wenn das große M groß ist, dann wird's großer Bruch.
>
> S1: Wenn das große M klein ist.
>
> S2: Ja nee, doch das mein ich ja. Ja genau.
>
> S1: Geht's gegen Eins und das g wird halt groß...

Es fällt auf, dass S1 die Fallbeschleunigung g als durch die Größe des Bruches beeinflusst ansieht. Der Bruch wird mit g multipliziert und S1 sagt, dass g dadurch entweder klein oder groß werde. Der Faktor g übernimmt die Rolle eines Funktionswertes, der sich in Abhängigkeit vom ersten Faktor ändert[1].

Ebenso stellt eine Gruppe bei der Aufgabe „Phantasie-Universum“ Überlegungen zu der Formel $S = \frac{1}{2G} \cdot T^2$ an und äußert dabei einen Einfluss von $\frac{1}{2}G$ auf die Zeit:

> S1: ...dann, dann wird der Nenner größer und dadurch die Zahl kleiner. Ja. Und wenn also das... also wenn die Zahl insgesamt kleiner wird und wir die dann mal t Quadrat, dann ist das ja weniger Zeit.

Die Zeit T^2 nimmt die Rolle eines Funktionswertes an, der sich in Abhängigkeit von dem Bruch ändert. Eine Verkleinerung des Bruchs bewirke auch eine Verringerung der Zeit.

1 Es könnte auch sein, dass S1 bloß g sagt, aber eigentlich a meint. Für diese Interpretation lassen sich allerdings keine Hinweise im Transkript finden, die Schüler bezeichnen a und g ansonsten immer passend. Daher ist die plausibelste Annahme, dass S1 tatsächlich g als durch den Bruch beeinflusst ansieht.

In dem folgenden Beispiel lässt sich ein interessanter Einfluss dieses Problems auf die Argumentation eines Schülers erkennen. Der Schüler stellt Überlegungen zum Einfluss der Terme in der Formel zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung an. Dabei verfolgt er den richtigen Ansatz, die gegebene Begründung ist jedoch nicht ganz korrekt. Der Gedankengang des Schülers lässt sich schlüssig aus der Perspektive der Vorstellung „Gegenseitige Beeinflussung der Faktoren“ nachvollziehen.

> S1: ...welche Summanden zu welchen Zeiten den größten Einfluss...das ist natürlich ein bisschen schwierig. Also am Anfang hat natürlich der hier den größten Wert, weil der hier (meint s_0) ist nicht in Abhängigkeit von der Zeit. Weißt du? Weil wenn die Zeit gerade eine Sekunde ist, ist das (meint $at^2/2$) am aller kleinsten, weil nämlich die Beschleunigung noch sehr klein ist durch das ein Halb. Das (meint v_0 oder $v_0 t$) ist auch noch sehr klein, weil hier eine Eins davor steht, aber das (s_0) ist schon bei Zeit null, dann wenn hier überall null steht, aber das hat schon einen Wert, wenn also gerade am Start...

Der Schüler hat eigentlich den richtigen Ansatz erkannt, da er den Einfluss der Terme zu verschiedenen Zeiten anhand der Abhängigkeit der Terme von der Zeit bewertet. Er erkennt, dass s_0 als Konstante zu Beginn (bei $t = 0\text{s}$) den größten Einfluss haben muss. Allerdings zeigt er in der weiteren Begründung, dass er den Wert der anderen beiden Terme anhand von Zahlenwerten einschätzt, obwohl er keine Werte für a und v_0 angenommen hat. Er betrachtet $t = 1\text{s}$ weshalb die beiden ersten Terme folgendermaßen erscheinen: $1/2 \cdot a + 1 \cdot v_0$. Dann orientiert sich der Schüler an den Vorfaktoren und sagt, die Beschleunigung sei durch das 1/2 noch sehr klein und das andere auch wegen der Eins.

Es gibt zwei mögliche Interpretationen: Entweder hat der Schüler intuitiv $a = v_0$ gesetzt und dann berechtigterweise dem Vorfaktor die ausschlaggebende Funktion zugeschrieben oder er hat bei jedem Term einen Einfluss des Vorfaktors auf die mit ihm multiplizierte Größe gesehen und daraufhin die Werte der Größen beurteilt. Diese zweite Interpretation ist naheliegend, da der Schüler explizit die Beschleunigung als klein aufgrund des 1/2 bezeichnet. Insofern scheint der Faktor 1/2 den Wert der Beschleunigung zu beeinflussen, womit eine funktionale Abhängigkeit in dem Produkt vorliegt.

9.2. Schematisch-technischer Umgang und oberflächliche Übersetzung

Der zweite Problembereich betrifft die Anwendung technischer Fähigkeiten als Ersatz für strukturelle Fähigkeiten (siehe Abb. 9.2). In diesem Problembereich sind daher Probleme angesiedelt, bei denen die Schüler eine oberflächliche Verbindung als Ersatz für bewusstes Mathematisieren oder Interpretieren herstellen oder kalkülorientiert vorge-

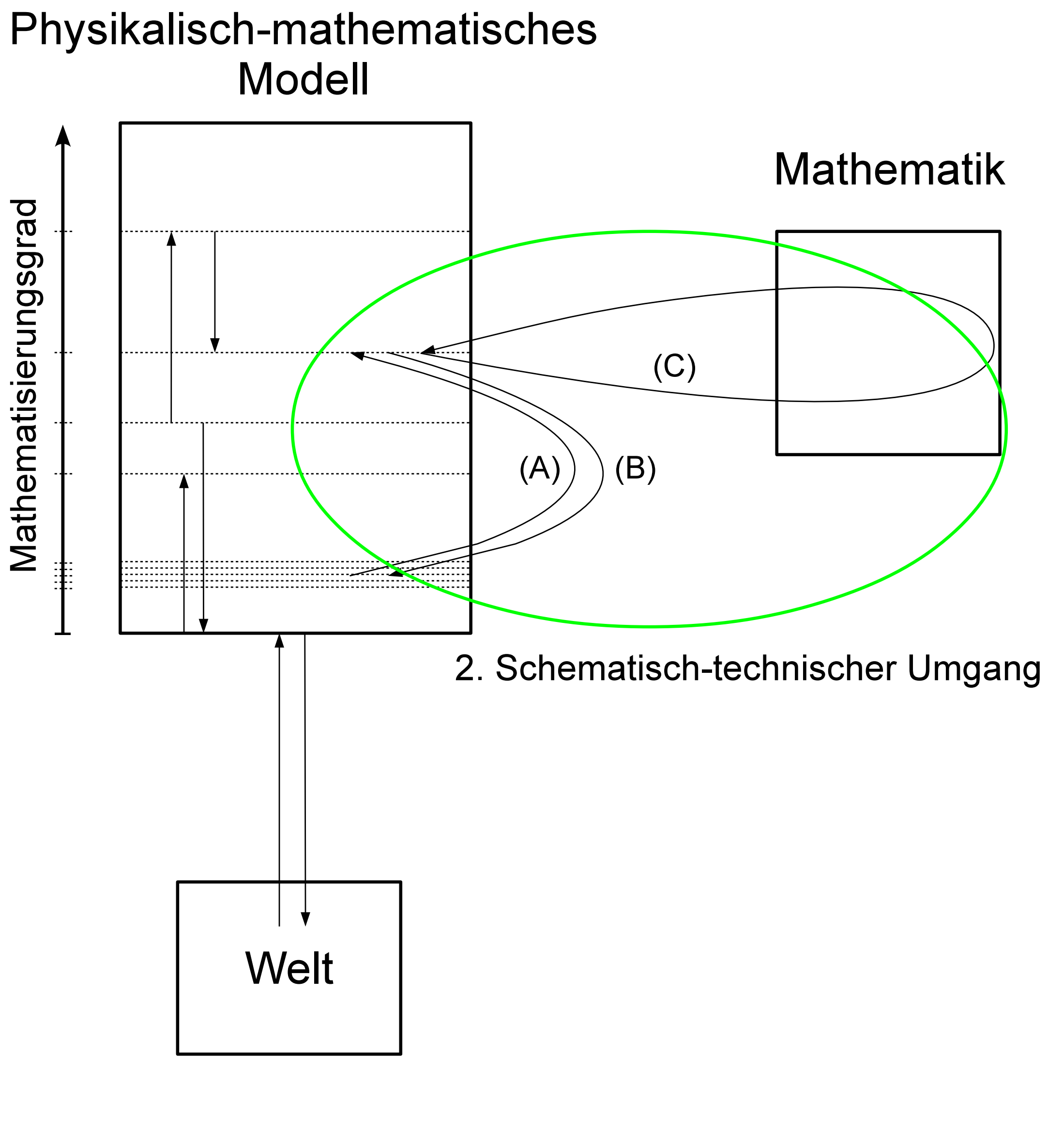


Abbildung 9.2.: Markierung des zweiten Problembereichs „Schematisch-technischer Umgang“ im revidierten Modellierungskreislauf.

hen, obwohl eine inhaltliche Übersetzung angebracht wäre.

In Kapitel 8.2 wurden bereits drei zu erwartende Problemkategorien anhand der drei entsprechenden Pfeile im revidierten Modellierungskreislauf abgeleitet. Diese drei Kategorien zeigen sich auch in den empirischen Daten. Der „gebogene Pfeil nach oben“ (A), der die Ersatzhandlung für das Mathematisieren repräsentiert, lässt sich als eine auf Erinnerung beruhende Auswahl von Formeln spezifizieren. Der „gebogene Pfeil nach unten“ (B), der die Ersatzhandlung für das Interpretieren repräsentiert, zeigt sich in den Bearbeitungen der Schüler als eine Bedeutungsgebung, die aufgrund oberflächlicher Assoziation geschieht. Der dritte „geschwungene Pfeil“ (C) passt zu einem teilweise unangemessenen routinierten und schematischen Vorgehen anstelle von einem inhaltlichen Abgleich.

Mit diesen drei Problemkategorien lassen sich die Probleme der Schüler in dem Problembereich des schematisch-technischen Umgangs erschöpfend beschreiben. Es sind keine weiteren Kategorien nötig. In diesem Abschnitt werden die drei Problemkategorien näher erläutert und mit Beispielen aus den empirischen Daten unterlegt. Ein Überblick mit der zugehörigen Verortung im revidierten Modellierungskreislauf ist in Tabelle 9.2 dargestellt.

9.2.1. Ersatz für Mathematisierung: Erinnern

Bei diesen Problemen besteht die Problematik in einer unreflektierten Ersatzhandlung für eine auf die inhaltliche Bedeutung abgestimmte Mathematisierung. Anstelle „echten“ Mathematisierens wird die Verbindung zur mathematischen Repräsentation aufgrund oberflächlicher Merkmale hergestellt. Auswendig gelerntes Wissen wird herangezogen, um sich an die zur physikalischen Situation gehörige Formel zu erinnern, d.h. es wird eine Verbindung zwischen Symbol und Formel hergestellt. Ein häufig auftretender Effekt dieser Strategie ist beispielsweise das Benutzen von $v = s/t$ bei einer beschleunigten

1. „gebogener Pfeil nach oben“ (A)	2. „gebogener Pfeil nach unten“ (B)	3. „geschwungener Pfeil“ (C)
Ersatz für Mathematisierung: Erinnern	Ersatz für Interpretation: Assoziation	Schematisch-technisches Vorgehen und Routine

Tabelle 9.2.: Überblick über die identifizierten Probleme zum schematisch-technischen Umgang.

Bewegung.

Ebenfalls häufig tritt das Erinnern im Umgang mit Einheiten auf. Passende Einheiten zu physikalischen Größen werden erinnert, ohne einen Zusammenhang zur physikalischen Bedeutung herzustellen. Dabei kann es passieren, dass das Wissen fehlerhaft ist. So wird die Einheit der Beschleunigung als m/s angegeben, ohne einen Widerspruch zu bemerken. Würden die Schüler die Bedeutung der Einheiten verstehen, könnte die Beschleunigung als zeitliche Änderung der Geschwindigkeit zur Einheit Länge/Zeit^2 führen. Allerdings ist hierbei zusätzlich das Problem zu vermuten, dass den Schülern diese Bedeutung der Beschleunigung nicht bewusst ist, wie es die Probleme zum Konzept der Änderungsrate (9.1.6.) andeuten.

In der folgenden Sequenz wird der Vorgang des Erinnerns an eine Formel, ohne einen Bezug zur physikalischen Situation herzustellen, sehr deutlich. Die Schüler versuchen, sich bei der Aufgabe „Zwei Massen“ an die Formel für die Kraft zu erinnern. Dieser Versuch geschieht anscheinend aufgrund der Verbindung von Symbolen in der Aufgabe „Zwei Massen“ mit den Symbolen in der Formel für die Kraft. Die Schüler raten und versuchen, auf gelerntes Wissen zurückzugreifen, um sich an die Formel zu erinnern.

S1: m ist Fg ne?

S2: Hmm...

S1: Nee? Da gibt's doch irgend eine Formel.

(Beide lachen kurz)

S2: m ist ... F ... nee, a ist s mal m oder so?!

S1: Ich glaube a ist gleich F mal m.

S2: a ist F?...m

S1: Nee.

9.2.2. Ersatz für Interpretation: Assoziation

Die Bedeutungszuweisung mathematischer Strukturen geschieht aufgrund von oberflächlicher Assoziation. Es wird eine grobe Verbindung zwischen Bedeutung und Mathematik aufgrund hervorstechender Merkmale hergestellt, ohne weitere Besonderheiten zu beachten. Es besteht das Schema „Teil=Ganzes“. Einem Teil einer Struktur wird die Bedeutung gegeben, die eigentlich durch die ganze Struktur repräsentiert wird.

Explizit zeigt sich diese Form der Bedeutungsgebung, wenn die Terme der Gleichung zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung anhand der charakteristischen physikalischen Größe bezeichnet werden, die in jedem Term vorhanden ist. So kommt es zu Äußerungen wie „v mal t ist die Geschwindigkeit“. Weiterhin zeigt sich die oberflächliche Assoziation anhand hervorstechender Merkmale, wenn ein Teilterm der Formel zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung bereits das ausdrückt, wofür eigentlich die Summe als Ganzes steht.

> S1: Die Strecke die in einer bestimmten Zeit zurückgelegt wird, wird mit dem ersten Summanden ausgedrückt.

Der Schüler weiß, dass der Term $at^2/2$ einen Ausdruck für eine Strecke in einer bestimmten Zeit darstellt. Diese Bedeutung wird in den neuen Zusammenhang der ausführlicheren Gleichung übertragen, in der der erste Term nur noch einen Beitrag zu der Gesamtstrecke beschreibt. Dieser Bedeutungswechsel wird von dem Schüler jedoch nicht bemerkt, da er einfach auf sein Wissen zurückgreift, ohne die Passung zur neuen Situation zu überprüfen. Auch in dem folgenden Dialog wird diese Problematik deutlich:

> S1: Das heißt, $v_0 t$ ist dann halt der Weg.
>
> S2: Der zurückgelegte Weg.
>
> S1: $v_0 t$ zurückgelegter Weg in der Zeit nach dem Start. (schreibt: $v_0 t =$ zurückgelegter Weg in der Zeit nach dem Start)

9.2.3. Schematisch-technisches Vorgehen und Routine

Es zeigt sich ein Umgang mit der Mathematik, der auf Routine und schematischem Vorgehen beruht. Die technischen Fähigkeiten dominieren, es wird kein Zusammenhang zur Bedeutung hergestellt. Wenn in dieser Art und Weise das Kalkül den Gebrauch der Mathematik bestimmt, werden Fehler in Bezug zur Bedeutung nicht bemerkt.

In dem folgenden Beispiel zur Aufgabe „Zwei Massen“ diskutieren die Schüler den ersten Fall, in dem die oben liegende Masse M vernachlässigt wird. Diese Gruppe mathematisiert „vernachlässigen“ jedoch im Sinne von „durchstreichen“. In der Aussage, dass M „Eins oder Null oder sowas“ sei, wird deutlich, dass das Durchstreichen als Ersatz für eine auf Verständnis basierende Mathematisierung fungiert — und zudem das Problem der Vermischung von 0 und 1 (9.1.5.c) vorhanden ist. Genauso wird mit den beiden m’s verfahren, die zum Kürzen auch durchgestrichen werden, mit der Begründung, dass sie dann Null seien (Problem 9.1.5.c).

> S1: Und dann steht da ja noch die Masse M kann vernachlässigt werden... also ist vernachlässigbar klein. Also ist sie Eins oder Null oder sowas. Naja wenn, dann kann man sie eigentlich auch vernachlässigen.
>
> S2: Jaja, ist logisch.
>
> S1: Und das heißt ja, dass M raus fällt, dann ist es m, also denk ich. (streicht M durch)
>
> S2: Ist es m durch m.
>
> S1: Ist es klein m durch klein m, das fällt dann eigentlich auch raus, weil es ja dann Null ist und dann ist a so groß wie g und g ist ja glaube ich, wenn ich's nicht falsch habe 9,81 Meter pro Sekunde.
>
> S2: Ah, ist dieses komische...
>
> S1: Fallbeschleunigung
>
> S2: ...Anziehungskraft.
>
> S1: Also dann fällt das alles raus und a ist gleich g. (streicht die beiden m's durch)

In der ganzen Herangehensweise und der Umsetzung der Vernachlässigung von M zeigt sich ein technisch orientierter Umgang. Den Schülern ist die genaue Bedeutung der mathematischen Handlungen nicht bewusst, sie „tun es einfach".

Ein weiterer Aspekt zum schematischen Umgang, der stark auf Routine beruht, betrifft die oberflächliche Nutzung von Einheiten. So findet teilweise keine saubere Einheitenrechnung statt, in der die Einheit des Ergebnisses mit der Rechnung übereinstimmt. Stattdessen wird an das Ergebnis einfach die Einheit angehängt, die aufgrund der physikalischen Bedeutung passt.

Bei einer Gruppe passen die Einheiten in der Rechnung nicht mit der Einheit des Ergebnisses zusammen:

$$\frac{1}{2 \cdot 10\mathrm{m}/\mathrm{s}^2} \cdot 25\mathrm{s}^2 \rightarrow s = \frac{25}{20}\mathrm{m}$$

Die Schüler haben in der Rechnung die Einheiten auch nicht weiter beachtet. Sie haben einfach das Ergebnis mit der physikalisch passenden Einheit ergänzt. Das Mitschreiben der Einheiten in der Rechnung ist nur pro forma geschehen, als Hilfsmittel zur Verifizierung wurde es nicht genutzt.

9.3. Interferenz mit dem Erfahrungsbereich der Schüler

Der dritte Problembereich beinhaltet die Interferenz mit der Erfahrungswelt der Schüler (siehe Abb. 9.3). Die hier anzusiedelnden Probleme entstehen aufgrund einer Beeinflussung der Verbindung von Physik und Mathematik durch die Erfahrungen der Schüler. Die Schüler machen hauptsächlich im Unterricht Erfahrungen, aufgrund derer sie intuitive Vorstellungen beispielsweise zum Geltungsbereich von Formeln oder zum Wesen physikalischer und mathematischer Modelle ausbilden. Diese Vorstellungen können mit der Übersetzung zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischen Strukturen interferieren.

Die in Kapitel 8.2 aus dem revidierten Modellierungskreislauf abgeleitete Problemkategorie zur idealisierten Natur physikalisch-mathematischer Modelle lässt sich auch in den empirischen Daten finden. Es zeigt sich, dass einige Schüler den Modellcharakter der physikalisch-mathematischen Beschreibung nicht akzeptieren, sondern eher eine exakte Behandlung erwarten. Weitere Problemkategorien betreffen schulische Erfahrungen mit Spezialfällen von Formeln sowie konkrete Bezüge physikalischer Größen. Es haben sich die folgenden drei Problemkategorien ergeben:

1. Erfahrungen mit Spezialfällen von Formeln
2. Exakter Charakter physikalisch-mathematischer Modelle
3. Konkreter Bezug physikalischer Größen

9.3.1. Erfahrungen mit Spezialfällen von Formeln

In der Schule liegt der Fokus bei der Verwendung von Formeln zumeist auf Spezialfällen mit eingeschränktem Gültigkeitsbereich. So wird in der Kinematik oftmals die Betrachtung von Anfangsbedingungen außer Acht gelassen und nur mit den Formeln $s(t) = vt$ oder $s(t) = at^2/2$ gearbeitet. Den Schülern scheint die eingeschränkte Gültigkeit dieser Formeln allerdings nicht bewusst zu sein. Sie sehen die Spezialfälle der Formeln

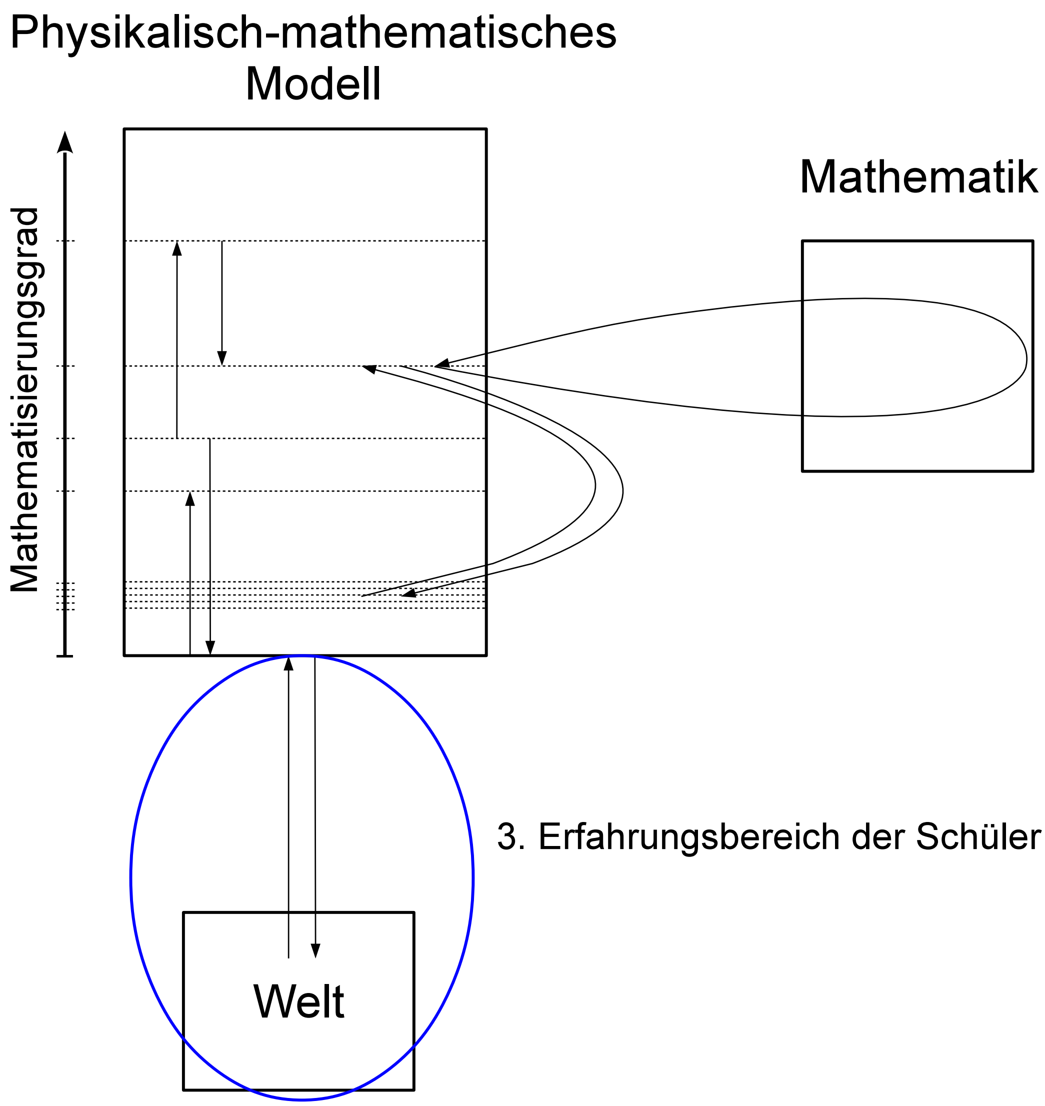


Abbildung 9.3.: Markierung des dritten Problembereichs „Erfahrungsbereich der Schüler“ im revidierten Modellierungskreislauf.

eher als Normalfall an, was das Interpretieren der entsprechenden allgemeinen Formel erheblich erschwert.

So haben einige Schüler die Auffassung, dass Formeln zur Bewegungsbeschreibung aus der Ruhe beginnen müssen. Die Bedeutung der Anfangswerte in der Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“ kann dadurch nur schwer erschlossen werden. Diese Problematik zeigt sich meist sehr explizit in den Äußerungen der Schüler.

S1: s zum Zeitpunkt null müsste null sein. Weil zum Zeitpunkt null noch

> kein Weg zurückgelegt wurde.

Dabei zeigt sich eine Auswirkung dieser Vorstellung auf die Verbindung zwischen Physik und Mathematik in der Nichtbeachtung der mathematischen Struktur. Die Existenz der Konstanten s_0 widerspricht eigentlich der Annahme $s(0) = 0$. Allerdings wird diese Tatsache von S1 nicht beachtet, da die aus der Erfahrung generierte Vorstellung überwiegt. Auch bei der folgenden Gruppe zeigt sich dieser Widerspruch:

> S1: ...ja, aber am Anfang ist alles null.
>
> S2: Ne, eben nicht. Das (bezieht sich auf s_0) ist nicht null.
>
> S1: Natürlich (ist alles Null).

S1 geht fest von der Annahme aus, dass die Bewegungsbeschreibung aus der Ruhe beginnen muss. Daher widerspricht er sogar der Aussage von S2, der erkennt, dass s_0 nicht Null ist.

Eine andere Auswirkung der schulischen Erfahrung mit Spezialfällen von Formeln zeigt sich in der Vorstellung einer Hauptformel. Der aus der Schule bekannte Spezialfall $at^2/2$ erhält in den Vorstellungen der Schüler eine größere Bedeutung als die allgemeine Variante der Formel, so dass der Spezialfall als Hauptformel des allgemeinen Falls angesehen wird.

> S1: Na welche Bedeutung. Was das für eine Bedeutung...ist eigentlich...Hauptformel würde ich sie bezeichnen. Weil wir haben in der Schule nur mit den beiden Formeln gerechnet, ohne die beiden anderen Sachen.
>
> S2: Mhh. (zustimmend)
>
> S1: Schreib hin, dass das irgendwie die Hauptformel ist...Grundformel für die Berechnung. (S2 schreibt: Grundformel für die Berechnung)

Diese Auffassung einer Haupt- oder Grundformel zeigt sich auch implizit in Aussagen von Schülern, die bereits in dem ersten Term $at^2/2$ einen Ausdruck für die Strecke der beschleunigten Bewegung sehen.

> S1: Gut...also ich habe hingeschrieben, dass es im Prinzip die Strecke ist, wo der Körper beschleunigt wird.

Die Schüler haben den Term $at^2/2$ nur in dem Kontext als alleinstehende Formel erfahren, so dass er diese Bedeutung repräsentiert, auch wenn er als Teil einer umfassenderen mathematischen Struktur auftritt.

9.3.2. Exakter Charakter physikalisch-mathematischer Modelle

Die physikalisch-mathematische Beschreibung als Idealisierung der Realität wird nicht akzeptiert. Es besteht die Ansicht, dass die Beschreibung exakt ist, so dass idealisierte Ergebnisse als nicht sinnvoll oder unrealistisch betrachtet werden. Daher muss die mathematische Beschreibung nicht zwingend zum physikalischen Verhalten passen, was dazu führt, dass die Interpretation mathematischer Ergebnisse nicht zum Erkennen von Fehlern genutzt werden kann.

So betrachtet eine Gruppe ihre Ergebnisse bei der Aufgabe „Zwei Massen“ als nicht sinnvoll, da die Reibung vernachlässigt wird. Diese Einschätzung verhindert das Interpretieren der Ergebnisse im Hinblick auf Korrektheit.

> S1: Naja... ich würde aber sagen eher nicht (meint physikalisch sinnvoll), weil die Reibung vernachlässigen ist für mich jetzt physikalisch nicht sinnvoll.

Eine andere Gruppe hat Probleme damit, das Vernachlässigen der Masse als Null zu mathematisieren, da sie „vernachlässigen“ sehr exakt auffasst:

> S1: Es ist vernachlässigbar klein. Es ist sehr sehr klein, aber es ist... es geht durch die Gleichung nicht, dass es vernachlässigt wird.

Bei einer weiteren Gruppe stellt bereits die Idee der Vernachlässigung einen Widerspruch dar:

> S1: (lacht) Na man kann ja schlecht eine Masse vernachlässigen das spielt ja überall eine Rolle mit.

In diesem Fall hält die Vorstellung einer exakten physikalisch-mathematischen Beschreibung den Schüler davon ab, überhaupt die Grenzfälle bei der Aufgabe „Zwei Massen“ zu betrachten.

9.3.3. Konkreter Bezug physikalischer Größen

In dieser Kategorie sind Probleme enthalten, die dadurch entstehen, dass physikalische Größen und Symbole mit konkreten Vorstellungen verbunden werden. Dabei können sich die konkreten Vorstellungen auf die Bedeutung oder die Einheit der Größe beziehen. So wird zum Beispiel das Symbol t als Ausdruck für die Uhrzeit aufgefasst oder die Einheit der Fläche in Quadratzentimetern gesehen. In beiden Fällen besteht ein konkreter Bezug der jeweiligen physikalischen Größe zu einer spezifisch-anschaulichen Ausprägung einer eigentlich abstrakteren Eigenschaft. Dadurch können mit dieser Konkretisierung verbundene Vorstellungen auf die Argumentation einwirken und zu Problemen führen.

In dem folgenden Beispiel bewirkt die Vorstellung der Zeit t als Uhrzeit, dass bei der Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung" die Zeit zu Beginn nicht als null angesehen wird.

> S1: Mal t, aber ist das...t ist ja null, hehe
>
> S2: Ne, t ist nicht null.
>
> S1: Wieso nicht?
>
> S2: Ich bin schon 20 Minuten unterwegs.
>
> S1: Ja, aber die Messung fängt ja jetzt erst hier an, hätte ich gedacht.
>
> S2: Ja, aber die Zeit läuft ja schon. Also zum Beispiel um 7.15 Uhr und dann sind schon 7 Stunden 15 Minuten rum.
>
> S1: Okay.
>
> S2: Damit man die Uhrzeiten ausrechnen kann, muss man das immer so...voilá.

S2 stellt sich die Zeit t als Uhrzeit vor, deren Beginn um Mitternacht — 0 Uhr — ist. Bei dieser konkreten Vorstellung von der Zeit wird t nicht als abstrakte Funktionsvariable aufgefasst, sondern ist von der spezifischen Situation — der Tageszeit — abhängig.

Im Zusammenhang mit Einheiten zeigt sich der konkrete Bezug in der Auffassung verschiedener Größenordnungen als eigenständige Einheiten. In dem folgenden Beispiel ordnen die Schüler der Strecke die Einheit „Meter" und der Fläche die Einheit „Quadratzentimeter" zu. Dadurch erscheinen die Einheiten unterschiedlich und es treten Probleme auf.

> S1: Na wenn man das in Meter (zeigt auf cm) kriegen würde, dann könnte man das hier (zeigt auf m^2) nämlich einfach so kürzen, und dann wäre hier (zeigt auf m^2/s^2) Meter durch s Quadrat und dann hätten wir die...

S1 erkennt zwar die gemeinsame Referenz von Meter und Zentimeter als Ausdruck einer Längeneinheit, es ist ihm allerdings nicht bewusst, dass die konkrete Ausprägung für die Überprüfung der Einheiten unwesentlich ist.

9.4. Ergänzende Probleme

Zusätzlich zu den drei Problembereichen des revidierten Modellierungskreislaufs ist in Kapitel 8.2 bereits der Bereich der ergänzenden Probleme eingeführt worden. Die hier verorteten Probleme lassen sich nicht eindeutig einem der drei anderen Bereiche zuordnen, da sie zusätzlich und in allen Bereichen wirken können. Neben der physikalischen und mathematischen Korrektheit lassen sich zwei weitere Probleme identifizieren, die als zusätzliche Einflussfaktoren aufzufassen sind. Es geht um den Fokus der Aufmerksamkeit der Schüler, der teilweise sehr stark auf die physikalische oder die mathematische Beschreibung eingeengt ist. So kann es dazu kommen, dass eine Betrachtungsweise implizit als korrekt angenommen wird und dadurch die andere Betrachtung determiniert, ohne dass ein sich gegenseitig unterstützender Einfluss genutzt wird. Dies kann in beiden Richtungen passieren, so dass das physikalische Verhalten der mathematischen Behandlung angepasst wird, oder dass physikalische Vorstellungen die mathematische Struktur überlagern.

9.4.1. Mathematik determiniert Physik

Wenn die Mathematik die Physik determiniert, gehen die Schüler von der mathematischen Beschreibung aus und interpretieren die Physik entsprechend. Die Interpretation wird allerdings nicht mit einer physikalischen Betrachtung abgeglichen, sondern von der Mathematik determiniert. Das physikalische Verhalten wird so angenommen, wie es die Mathematik beschreibt, auch wenn dabei schwer verständliche Situationen entstehen. Dabei ist die Interpretation ungenau, was dazu führt, dass eine Übereinstimmung von physikalischem Verhalten und Ergebnis festgestellt wird, obwohl das Ergebnis falsch ist.

Zum Beispiel erhalten einige Gruppen bei der Aufgabe „Zwei Massen" für den zweiten Fall, bei dem die hängende Masse vernachlässigt wird, als Ergebnis $a = \frac{1}{M} \cdot g$. Dieses Ergebnis ist aufgrund von Fehlern, wie beispielsweise das Kürzen der beiden m's, entstanden. Anstatt jetzt jedoch zu bemerken, dass hier ein Fehler vorliegt, da das Ergebnis nicht mit dem physikalischen Verhalten übereinstimmt, wird das Verhalten entsprechend der Mathematik interpretiert.

> S1: Was das heißt...Wenn man davon ausgeht, dass das große M 9,91 Meter pro Sekunde
>
> S2: Hmm.

S1: Ähm fährt, dann fällt das

S2: Hä? Doch!

S1: ...dann bewegt sich der Körper klein m ein groß M-tel zu g.Weißt du was ich meine?

S2: Nö!

S1: Shit. Also na klein m bewegt sich ein M-tel und groß M... das g...

S2: Hmm... hmmm das bewegt.. okej okej, jetzt hab ich's verstanden.

S1: Das ist mal eine physikalische Begründung. (lacht)

Es ist nicht klar ersichtlich, was sich S1 genau darunter vorstellt, dass sich „m ein M-tel zu g bewegt", und ob S2 wirklich verstanden hat, was S1 meint. Der Versuch, das physikalische Verhalten entsprechend der Mathematik zu interpretieren, ist aber deutlich ersichtlich. Durch diese Fokussierung auf die Mathematik nehmen sich die Schüler die Möglichkeit, durch einen Abgleich von Physik und Mathematik ihrem Fehler auf die Spur zu kommen.

In einem anderen Beispiel ist eine ähnliche Problematik zu erkennen. Aufgrund eines mathematischen Fehlers beim Kürzen erhalten die Schüler ebenfalls das Ergebnis $a = g/M$. Durch eine oberflächliche Interpretation des Ergebnisses, bei der die Beschreibung des physikalischen Verhaltens sehr ungenau ist, können die Schüler eine Übereinstimmung zwischen dem Ergebnis und dem physikalischen Verhalten herstellen.

S1: Und bei b) ist das... hab ich ein M-tel. Weil m und m kürzt sich weg.

S2: Ja. Ein groß M aber.

S1: Ein groß M oh ja. Und physikalisch sinnvoll, weil das bremst ja den freien Fall.

S2 sieht das Ergebnis als sinnvoll an, da der freie Fall gebremst würde. Die Vernachlässigung der hängenden Masse wird grob als Verlangsamung der Bewegung angesehen und die Beschleunigung $a = g/M$ als kleiner g, so dass ebenfalls eine Verkleinerung der Beschleunigung — also ein Bremsen — gesehen wird. Diese Ungenauigkeiten helfen, eine Übereinstimmung zu erkennen und das Ergebnis damit zu validieren.

9.4.2. Physik determiniert Mathematik

Ebenso wie in einigen Fällen das physikalische Verhalten durch die mathematische Beschreibung determiniert wird, kann auch der umgekehrte Fall auftreten, bei dem die mathematische Struktur durch physikalische Vorstellungen überlagert und bestimmt wird. Dieser Fall bezieht sich auf Situationen, in denen eigentlich eine mathematische Betrachtung angemessen ist, die Schüler jedoch von ihren physikalischen Vorstellungen ausgehen und diese der Mathematik „überstülpen".

Zum Beispiel wird bei der zweiten Teilaufgabe zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung nach dem Einfluss der Terme zu unterschiedlichen Zeiten gefragt. Hierbei ist eine mathematische Betrachtung notwendig: Die Potenzen der Zeit t zeigen an, wann jeder Term ungefähr den größten Beitrag liefert. Einige Schüler bewerten den Einfluss der Terme jedoch anhand ihrer physikalischen Vorstellungen, wodurch teilweise zur Mathematik widersprüchliche Aussagen entstehen, die von den Schülern allerdings nicht bemerkt werden.

Dabei tritt in dem folgenden Dialog zudem eine interessante Wechselwirkung mit der problematischen Vorstellung auf, dass eine physikalische Größe mal der Zeit die Größe in Abhängigkeit von der Zeit (9.1.8.a) repräsentiere. Bezüglich der Formel zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung erkennt ein Schüler, dass die Beschleunigung aufgrund der gleichmäßig beschleunigten Bewegung konstant ist. Im Zusammenhang mit der Vorstellung, dass der Term $at^2/2$ die Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit darstellt, folgt daraus, dass sich dieser Term nicht ändert.

> S1: Aber wenn es stimmt, dass du hier behauptest, dass die Beschleunigung sich in dem Sinne sich nicht ändert, wenn wir gleichmäßig beschleunigen. Dann hat wie du richtig feststelltest t nicht so viel Einfluss, obwohl es quadratisch ist. Das heißt es bleibt nur Summand Nummer zwei übrig, weil da hätte es einen Einfluss.

Die Überlagerung der mathematischen Struktur durch die physikalische Vorstellung ist hier besonders deutlich. S1 äußert explizit, dass t nicht so viel Einfluss habe, obwohl es quadratisch sei. Der Schüler erkennt, dass der Term von der Zeit t quadratisch abhängt, kommt jedoch trotzdem zu dem Schluss, dass der Term wenig Einfluss habe. Die Vorstellung, dieser Term repräsentiere die Beschleunigung und müsse demnach (nahezu) konstant sein, überlagert die mathematische Struktur des quadratischen Einflusses von t.

In einem anderen Beispiel tritt das Problem der Determinierung der Mathematik durch die physikalischen Vorstellungen im Zusammenhang mit der Problematik der oberflächlichen Interpretation als Assoziation (9.2.2) auf. Zum einen wird die Bedeutung der Terme aufgrund der charakteristischen Größe in dem Term bestimmt. Zum anderen besteht die physikalische Vorstellung, dass eine beschleunigte Bewegung sukzessiv abläuft: Erst wird beschleunigt, dann ist Geschwindigkeit vorhanden. Entsprechend dieser Vorstellung und der Bedeutungsgebung der Terme aufgrund der charakteristischen Größe wird der Einfluss der Terme bestimmt.

> S1: Aber sind das nicht Vorgänge die hintereinander ablaufen, oder nicht?
>
> S2: Na ich würd sagen, dass zuerst beschleunigt wird. Weil sonst kannst du keine Geschwindigkeit aufbauen.
>
> S1: Also das heißt, sie haben alle das gleiche Gewicht zu verschiedenen Zeiten.
>
> S2: Gewicht?
>
> S1: Einfluss halt.
>
> S2: Naja, es beginnt mit der Beschleunigung mit der Zeit ins Quadrat.

S2 sieht zu Beginn den größten Einfluss bei dem Term $at^2/2$, da dieser Term die Beschleunigung repräsentiert und diese physikalisch zuerst wichtig sei. S2 bezieht sich also explizit auf die mathematische Struktur des zweiten Terms und bemerkt auch, dass die Zeit quadratisch eingeht, bezieht diese Umstände allerdings nicht auf seine Einschätzung zum Einfluss der Terme. Dieser wird durch die physikalische Vorstellung einer sukzessiv ablaufenden beschleunigten Bewegung determiniert.

Eine etwas subtilere Problematik, bei der ebenfalls eine mathematische Betrachtung physikalisch überlagert wird, kann bezüglich des Begriffes „Einfluss“ auftreten. In dem Fall wird kein Unterschied zwischen dem physikalischen und mathematischen Einfluss gemacht, obwohl dieser Unterschied entscheidend sein kann. Mathematisch betrachtet haben in dem Produkt $a \cdot b \cdot c$ alle Größen den gleichen Einfluss, in dem Produkt $a \cdot b^2 \cdot c^3$ hat c den größten und a den kleinsten Einfluss.

Physikalisch betrachtet haben jedoch alle Größen eine Bedeutung. Dabei kann das physikalische Verhalten so sein, dass die Größe a in realen Situationen größeren Schwankungen unterliegt als die Größe c. Bezieht man dieses Wissen in die physikalische Betrachtung des Ausdrucks $a \cdot b \cdot c$ mit ein, hat a einen größeren Einfluss auf die Veränderung als c, da sich c unter normalen Bedingungen fast nicht ändert. Allerdings ist diese Betrachtung des Einflusses in der mathematischen Beschreibung mittels $a \cdot b \cdot c$ bereits enthalten, da alle Größen miteinander multipliziert werden.

Wenn die Schüler jedoch nicht sehen, dass diese Arten des Einflusses zwei unterschiedliche Aspekte sind, und dass die reale Änderung einer Größe für die mathematische Beschreibung nicht relevant ist, kann es zu Verständnisproblemen kommen. In diesem Sinne ist die folgende Äußerung eines Schülers zu verstehen, der bei der Aufgabe „Luftwiderstand" nicht weiß, wie er mit der Dichte der Luft umgehen soll, da diese in der Realität nahezu konstant ist.

> S1: Na und was machen wir mit der Dichte der Luft? Ich meine die hat ja theoretisch nicht wirklich Einfluss, weil die ändert sich ja nie.

Der Schüler geht von der realen physikalischen Betrachtung aus und sieht, dass sich die Dichte der Luft nicht ändert. Demnach hat sie für ihn keinen Einfluss und er weiß nicht, wie er sie in die Gleichung integrieren soll.

9.4.3. Physikalische Korrektheit

Die physikalische Korrektheit beeinflusst notwendigerweise auch die Verbindung von Physik und Mathematik, insbesondere im Zusammenspiel mit dem Problem der Determinierung der Mathematik durch die Physik (9.4.2). Wie bereits in Kapitel 8.2 erwähnt, soll jedoch keine nähere Auflösung dieser Problematik erfolgen. Um einen Eindruck von dieser Art von Problemen zu geben, sei an dieser Stelle ein Beispiel aufgeführt, bei dem die Übersetzung zwischen Physik und Mathematik durch physikalische Probleme beeinflusst wird.

Bei der Aufgabe „Luftwiderstand" überlegt ein Schüler, welchen Einfluss die Masse hat. Allerdings vermischt der Schüler die Konzepte von Beschleunigung und Geschwindigkeit.

> S1: Was ist denn die Masse? Je größer die Masse, desto schneller die Beschleunigung das heißt direkt proportional. Ja?...Richtig?

Der Einfluss der (mangelnden) physikalischen Korrektheit auf das Ergebnis der Mathematisierung ist klar ersichtlich. Da der Schüler die negative Beschleunigung aufgrund des Luftwiderstandes als Beschleunigung im Sinne einer Geschwindigkeit auffasst, stellt er eine direkte Proportionalität fest. Dieses Resultat ist nicht korrekt, obwohl bei der

Übersetzung an sich — von „je größer, desto schneller“ in eine direkte Proportionalität — keine Probleme aufgetreten sind.

9.4.4. Mathematische Korrektheit

Ebenso wie die physikalische Korrektheit beeinflusst auch die mathematische Korrektheit notwendigerweise die Verbindung von Physik und Mathematik, hier insbesondere im Zusammenspiel mit dem Problem der Determinierung der Physik durch die Mathematik. Es soll auch hierfür keine nähere Auflösung der Problematik erfolgen, sondern nur anhand von zwei Beispielen mögliche Einflüsse der mathematischen Korrektheit belegt werden.

Bei der Aufgabe „Luftwiderstand“ überlegt ein Schüler, welchen Einfluss die Dichte der Luft hat. Allerdings weiß er nicht, welches Verhalten eine direkte und welches eine indirekte Proportionalität anzeigt.

> S1: Ok, ρ ist das...warte mal, ist das jetzt direkt oder indirekt? Was war indirekt, wenn beides ansteigt und direkt proportional ist wenn das eine ansteigt, fällt das andere.

Ein weiteres Problem bezüglich der Proportionalität besteht bei Schülern, die zwei physikalische Größen A und B bei A/B als indirekt proportional zueinander verstehen. So äußert eine Gruppe zu der Gleichung $S = \frac{1}{2G} \cdot T^2$ bei der Aufgabe „Phantasie-Universum“ explizit:

> S1: Da G indirekt proportional zu T ist.

Der Schüler sieht G und T als indirekt proportional zueinander an, obwohl nur bei konstantem S eine direkte Proportionalität zwischen G und T^2 vorliegt. Hier liegen also zusätzlich zwei weitere Probleme vor: Zum einen wird kein Unterschied zwischen T und T^2 gemacht und zum anderen wird die Größe S außer Acht gelassen.

10. Problemanalyse: Diskussion

In diesem, die Problemanalyse abschließenden Kapitel werden die bisher vorgestellten Ergebnisse noch eingehender beleuchtet und diskutiert. Um ein möglichst breites Spektrum der identifizierten Probleme darzustellen, wird zu jeder der vier konzeptuell-mathematischen Physikaufgaben eine interessante Bearbeitung eines Schülerpaares vorgestellt und analysiert. An diesen Fallstudien lässt sich der Einfluss der Probleme auf den Lösungsprozess der Schüler exemplarisch nachvollziehen. Ebenso zeigen sich Wechselwirkungen der Probleme untereinander sowie Auswirkungen auf die Strategien der Schüler. Zum Abschluss des Kapitels folgt eine ausführliche Diskussion aller acht Problemfelder des Bereichs der strukturellen Fähigkeiten.

10.1. Fallstudien

In den folgenden vier Fallstudien wird jeweils der gesamte Verlauf der Lösung beschrieben und mit ausführlichen Beispieldialogen belegt, an denen einige der erläuterten Probleme und deren Einfluss auf den Lösungsprozess erkennbar werden. Die Auswahl der vorgestellten Schülerlösungen wurde so vorgenommen, dass ein möglichst breites Spektrum der Probleme sowie interessante Auswirkungen dargestellt werden können. Jede Lösung ist dabei ein für die entsprechende Gruppe individueller Prozess, der nicht repräsentativ ist. Verallgemeinerungen in der Art, dass die vorgestellten Fallstudien ein häufiges Vorgehen für die entsprechende Aufgabe darstellen, dürfen nicht gezogen werden, obwohl sich natürlich einige aufgabentypische Probleme zeigen. Es sind vielmehr Einblicke in mögliche Lösungsprozesse und Probleme, bei denen jedoch anzunehmen ist, dass sie in ähnlicher Form auch bei anderen Schülern auftreten können.

Zur Veranschaulichung und deutlichen Unterscheidung der beiden Schüler einer Gruppe werden die Schüler in den folgenden Beispielen mit Namen bezeichnet. Es werden weibliche Vornamen verwendet, die frei erfunden sind und auch keinen Rückschluss auf das Geschlecht des jeweiligen Schülers zulassen.

10.1.1. Aufgabe: Zwei Massen

Zu der Aufgabe „Zwei Massen“ wird die Bearbeitung von Nina und Katrin analysiert. Das Tafelbild der Schüler ist in Abbildung 10.1 abgebildet, wobei Nina mit weißer und Katrin mit schwarzer Farbe geschrieben hat. Zu Beginn unterhalten sich die Schüler kurz über ihre Überlegungen, die sie in der Stillarbeit vor der gemeinsamen Diskussion angestellt haben.

> Katrin: Na bei der ersten ist ja dann so ein g.
>
> Nina: Ja genau. Weil m durch m ist Eins.
>
> K: Ja.
>
> N: Und auch so. Sollst ja auch, ob es physikalisch sinnvoll ist, weil es ist ja dann, weil das egal ist, alles fällt das ja einfach nur mal runter und das ist freier Fall ist g.
>
> K: Na eben.
>
> N: Und bei b) ist das... hab ich ein M-tel. Weil m und m kürzt sich weg.
>
> K: Ja. Ein groß M aber.
>
> N: Ein groß M, oh ja. Und physikalisch sinnvoll, weil das bremst ja den freien Fall.
>
> K: Ja.

Nina und Katrin sind sich bei ihren Überlegungen einig. Bei der ersten Teilaufgabe haben sie das korrekte Ergebnis $a = g$, das Nina auch sofort zum physikalischen Verhalten des freien Falls in Bezug setzt. Bei der zweiten Teilaufgabe haben anscheinend beide Schüler die beiden m's gekürzt und daher das falsche Ergebnis $a = g/M$ erhalten. Dieses mathematische Problem (9.4.4) wird jedoch nicht behoben, da das Problem der Determinierung des physikalischen Verhaltens durch die Mathematik (9.4.1) auftritt. Durch eine ungenaue Interpretation der Mathematik und eine ungenaue Beschreibung der Physik stellt Nina eine Übereinstimmung zwischen dem Ergebnis und dem physikalischen Verhalten fest. Scheinbar sieht sie die Vernachlässigung der hängenden Masse als Verlangsamung der Bewegung an und die Beschleunigung $a = g/M$ als kleiner g, so dass sie ein Abbremsen der Beschleunigung feststellt.

Anschließend schreibt Nina für die erste Teilaufgabe das Ergebnis $a = g$ einschließlich Begründung an die Tafel:

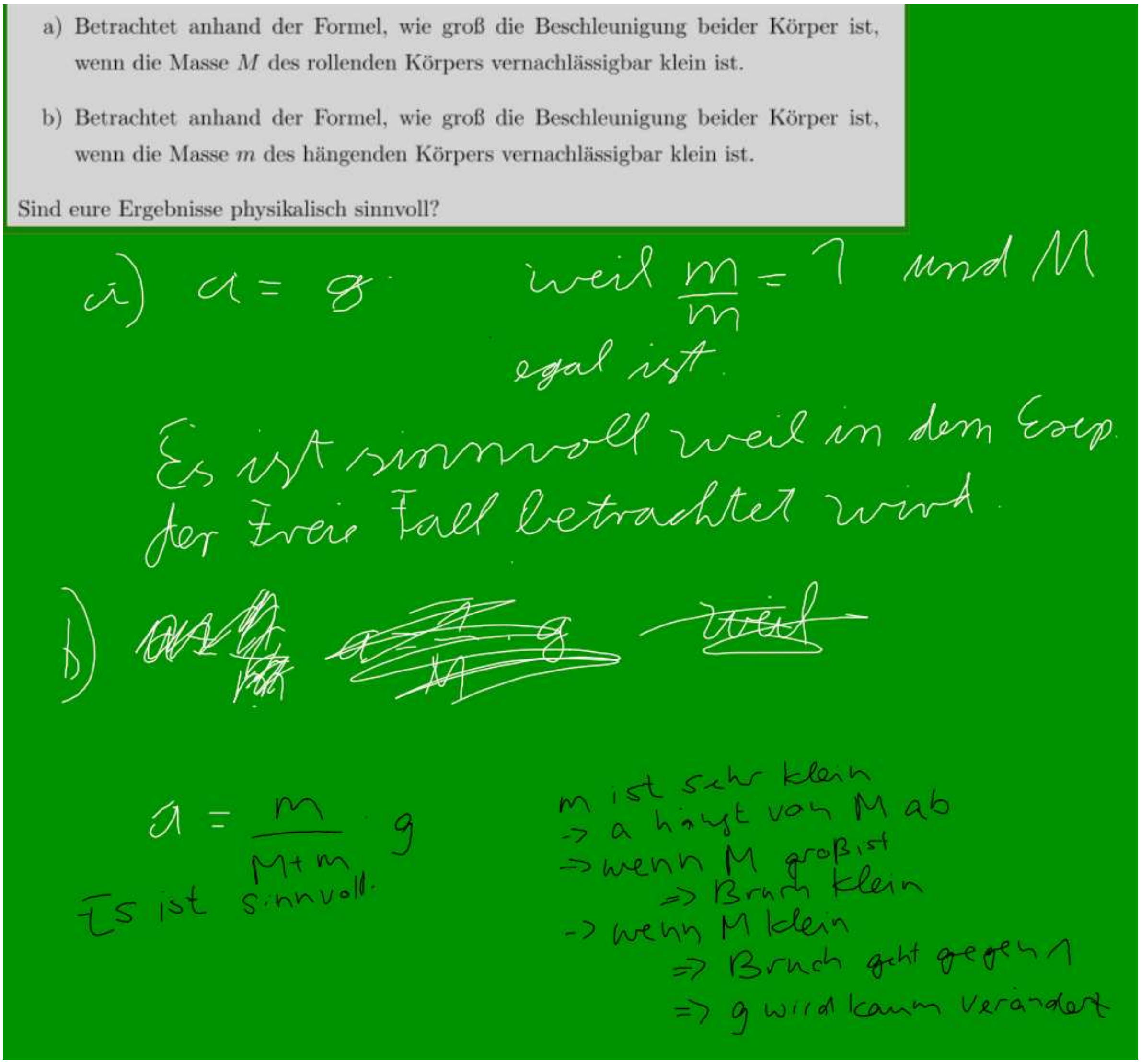


Abbildung 10.1.: Tafelbild von Nina und Katrin zu der Aufgabe „Zwei Massen“. Nina hat mit weißer und Katrin mit schwarzer Farbe geschrieben.

> Nina: ...begründen wir gleich, ähm...weil m durch m gleich Eins und groß M egal ist. So ähm...(schreibt: weil m/m=1 und M egal ist)

Hier tritt das Problem der impliziten Mathematisierung der Null (9.1.5.b) auf, da Nina nicht ausdrücklich $M = 0$ schreibt oder sagt, sondern M nur als „egal“ bezeichnet. An dieser Stelle wird schon der etwas ungenaue Umgang mit der Null ersichtlich, der sich auch im weiteren Verlauf zeigen wird. Danach diskutieren Nina und Katrin kurz, dass das Ergebnis physikalisch sinnvoll sei und Nina schreibt auf, dass „in dem Experiment der freie Fall betrachtet wird“.

Die zweite Teilaufgabe beginnen die Schüler ebenfalls damit, dass Nina das Ergebnis $a = \frac{1}{M} \cdot g$ aufschreibt, bei der Begründung fällt ihnen allerdings ihr Fehler auf.

> Nina: Ähm...weil
>
> Katrin: Klein m egal ist.
>
> N: Ja und weil auch m durch m wieder Eins ist.
>
> K: Nein, Null.
>
> N: Ach nee, ja stimmt, darfst du ja gar nicht durch teilen...
>
> K: Ja.
>
> N: ...weil das ja unten ein Plus ist. Ähm weil...

Katrin scheint den Fehler zu Beginn noch nicht zu sehen, stattdessen ist bei ihr wieder das Problem der impliziten Mathematisierung der Null (9.1.5.b) zu bemerken. Als Nina jedoch eine genauere mathematische Begründung für die Eins über dem Bruchstrich liefert, interveniert Katrin und sagt, dass es null sei. Allerdings ist nicht ersichtlich, was genau nach Katrins Meinung null sein soll. Aufgrund dieses Einspruchs fällt Nina auf, dass sie einen Fehler gemacht hat und das Kürzen der m's nicht erlaubt ist.

Nina und Katrin überdenken die Aufgabe neu und versuchen zu verstehen, wie sie mit der Vernachlässigung von m umgehen sollen.

> Nina: Aber da wäre das ja Null...
>
> Katrin: Du darfst aber doch nicht...wegkürzen oder?
>
> N: Nee, nee, wegkürzen darf ich nicht, aber wir sollen hier erstmal... hier (bezieht sich auf ersten Aufgabenteil) soll M vernachlässigt werden, das heißt a) ist gut und b)... vernachlässigbar klein ist, ist ja nicht dass das Eins ist...
>
> K: Vernachlässigbar... es ist so klein, dass es vernachlässigt werden kann.
>
> N: Na schön, da hast du oben halt knapp einen Wert über Null stehen.
>
> K: Ja.
>
> N: Null durch M ist nicht ein M-tel.

In Ninas erster Äußerung ist deutlich zu erkennen, dass sie ein Unbehagen mit der Null hat (9.1.5.a). Sie drückt Erstaunen aus und signalisiert, dass ihr das merkwürdig vorkommt. Dieser Widerstand gegen die Null wird auch ersichtlich, als die Schüler über die Mathematisierung von „vernachlässigen" diskutieren und Nina feststellt, dass dann ein Wert „knapp über Null“ über dem Bruchstrich stehe. Die Gleichsetzung von $m = 0$ wird nicht vorgenommen, wodurch plausibel wird, dass auch im ersten Aufgabenteil den Schülern nicht bewusst war, dass „M egal“ gleichbedeutend mit $M = 0$ ist.

Diese Problematik mit der Mathematisierung durch eine Null zeigt sich auch im weiteren Verlauf des Lösungsprozesses. Nachdem Nina das bisher zur zweiten Teilaufgabe Geschriebene durchgestrichen hat, diskutieren die Schüler darüber, wie sie mit „vernachlässigen“ und der Null umgehen sollen. Dabei wird immer wieder das Problem mit dem Unbehagen bezüglich der Null (9.1.5.a) deutlich, insbesondere bei Nina. Aber auch Katrin zeigt durch ihr Nachfragen eine Verunsicherung in Bezug auf das Ergebnis $a = 0$.

> Nina: Dann hast du, ähm, Null durch M.
>
> Katrin: Vielleicht fällt mir noch was ein.
>
> N: Nee, nee, das ist ja Null. Ist Null aber...
>
> K: Na Null mal g ist Null.
>
> N: Ja, aber ist ja kurz über Null also müsste ein ziemlich kleiner Wert raus kommen aber...
>
> K: Ist doch vernachlässigbar, so klein ist das, wird also gar nicht mit einbezogen. Es ist so klein, dass es vernachlässigbar... also dass es gar nicht mehr in die Rechnung mit einbezogen wird.
>
> N: Das kannst du aufschreiben.
>
> K: Da würde aber trotzdem Null durch M raus kommen.
>
> N: Ja genau, muss ja also erstmal. Müssen jetzt erstmal Null durch M hinschreiben und dann schreiben, ja nee aber...
>
> K: ... das geht ja dann trotzdem nicht....
>
> N: Schreibst du also a...
>
> K: (schreibt a=) Ist Null oder was?
>
> N: Nee, ist gleich... du schreibst erstmal die Formel hin... und schreibst dann dahinter, dass m so klein ist, dass man das Ganze, dass der ganze Bruch sehr klein wird.
>
> K: Hier (bezieht sich auf den ersten Aufgabenteil) steht doch auch... vernachlässigbar klein ist, da haben wir das m doch auch gleich weggelassen

> N: Ja aber ich... du willst jetzt den ganzen Bruch gleich weglassen?
>
> K: Ähm...
>
> N: Weil m sollen wir ja erstmal nicht weglassen, also schreiben wir m erstmal mit in die Gleichung rein...

Nina hält daran fest, dass vernachlässigen nur bedeute, dass m sehr klein — aber nicht Null — werde. Katrin bemerkt zwar, dass das einen Widerspruch zur ersten Teilaufgabe darstellt, in der sie M komplett weggelassen haben, allerdings hat auch sie Unbehagen mit der daraus resultierenden Schlussfolgerung $a = 0$. Daher kann sich Nina durchsetzen, so dass die Schüler im weiteren Verlauf die Masse m nur als sehr klein auffassen.

Bei der Ausarbeitung der Lösung stößt Nina jedoch auf ein weiteres Problem:

> Nina: Ähm, steht irgendwo dass das große M auch groß ist?
>
> Katrin: Das große M sollen wir doch gar nicht groß betrachten
>
> Nina: Ja aber schau mal, wenn das große M auch ganz ganz ganz ganz klein ist, dann ist das sowas wie, wenn du jetzt, äh, Null Komma Eins durch Null Komma Eins hättest, dann hättest du wieder Eins.

Nina betrachtet jetzt auch die Größe von M und bemerkt, dass dadurch die Größe des Bruchs ebenfalls beeinflusst wird, auch wenn m sehr klein ist. Bei ihrem Argument ist zwar eine mathematische Ungenauigkeit enthalten, da der Bruch bei $m = M = 0{,}1$ nicht den Wert 1, sondern den Wert $0{,}5$ annimmt, allerdings ist ihr Argument aus einer mathematischen Sicht im Prinzip richtig. Das Problem ist nur, dass die Größe von M für die Aufgabenstellung irrelevant ist, was auch Katrin bemerkt.

Nina lässt sich jedoch nicht beirren und bezieht — trotz weiterer Bemerkungen Katrins — auch die Größe von M in ihre Betrachtung mit ein. Nina macht eine Fallunterscheidung für die beiden Fälle, dass M groß oder klein ist: Für ein großes M werde der Bruch klein, bei kleinem M gehe der Bruch gegen Eins.

> Nina: Es ist vernachlässigbar klein. Es ist sehr sehr klein, aber es ist... es geht durch die Gleichung nicht, dass es vernachlässigt wird. Es hängt davon ab, wie jetzt M ist, wenn jetzt das große M groß ist, dann wird's ein ganz kleiner Bruch.
>
> Katrin: Hmm.
>
> N: Dann wird das g auch ganz klein.

> K: Und wenn das große M groß ist, dann wird's großer Bruch.
>
> N: Wenn das große M klein ist.
>
> K: Ja nee, doch das mein ich ja. Ja genau.
>
> N: Geht's gegen Eins und das g wird halt groß. M ist sehr klein, deshalb hängt das ganze von dem großen M ab, wenn groß M...

Zu Beginn zeigt Nina noch einmal ihren Widerstand gegen die Mathematisierung von „vernachlässigen" als Null und konzentriert sich auf die Abhängigkeit von M. Dabei fällt auf, dass Nina die Fallbeschleunigung g als durch die Größe des Bruches beeinflusst ansieht. Der Bruch wird mit g multipliziert und Nina sagt, dass g dadurch entweder klein oder groß werde (etwas später korrigiert sie den zweiten Fall noch dahin, dass g „kaum verändert" werde). Hier ist das Problem der Auffassung eines Produktes als Funktion (9.1.7.e) zu erkennen. Der Faktor g übernimmt die Rolle eines Funktionswertes, der sich in Abhängigkeit vom ersten Faktor ändert.

Zum Abschluss diskutieren Nina und Katrin noch kurz, ob ihr Ergebnis mit den zwei Fallunterscheidungen physikalisch sinnvoll ist:

> Nina: Ja das macht physikalisch auch Sinn, weil wenn m jetzt ganz klein ist und groß M ganz..
>
> Katrin: Groß...
>
> N: ... und schwer, dann bewegt sich das M kaum.
>
> K: Ja.
>
> N: Die Beschleunigung ist ganz klein und wenn groß M auch ganz klein ist, bewegt sich's trotzdem, mit einer annähernd normalen Fallbeschleunigung..
>
> K: Ja.

Zum Schluss ist wieder das Problem der Determinierung des physikalischen Verhaltens durch die Mathematik (9.4.1) zu beobachten, wie es bereits ganz zu Beginn der Aufgabenbearbeitung der Fall war. In dem mathematischen Ergebnis steckt der Fehler, dass der Bruch den Wert Eins annimmt, wenn beide Massen klein sind. Allerdings wird dieser Fehler nicht bemerkt, sondern stattdessen das physikalische Verhalten ungenau beschrieben und somit dem Ergebnis angepasst.

Insgesamt zeigt sich bei der Bearbeitung der Aufgabe „Zwei Massen" durch Nina und Katrin sehr deutlich, wie das Unbehagen mit der Null die Lösung der zweiten Teilaufgabe behindert. Nina findet den Ausweg, eine Fallunterscheidung unter Einbeziehung auch der Masse M zu machen, was durchaus als kreative Idee zu bewerten ist. Zum Schluss zeigt sich jedoch — ebenso wie zu Beginn — das Problem der Determinierung des physikalischen Verhaltens durch das mathematische Ergebnis. Aufgrund einer ungenauen physikalischen Interpretation stellen Nina und Katrin eine Übereinstimmung zwischen Physik und Mathematik her. Dadurch können sie diesen Abgleich nicht dazu nutzen, ihre mathematischen Fehler zu entdecken und zu beheben.

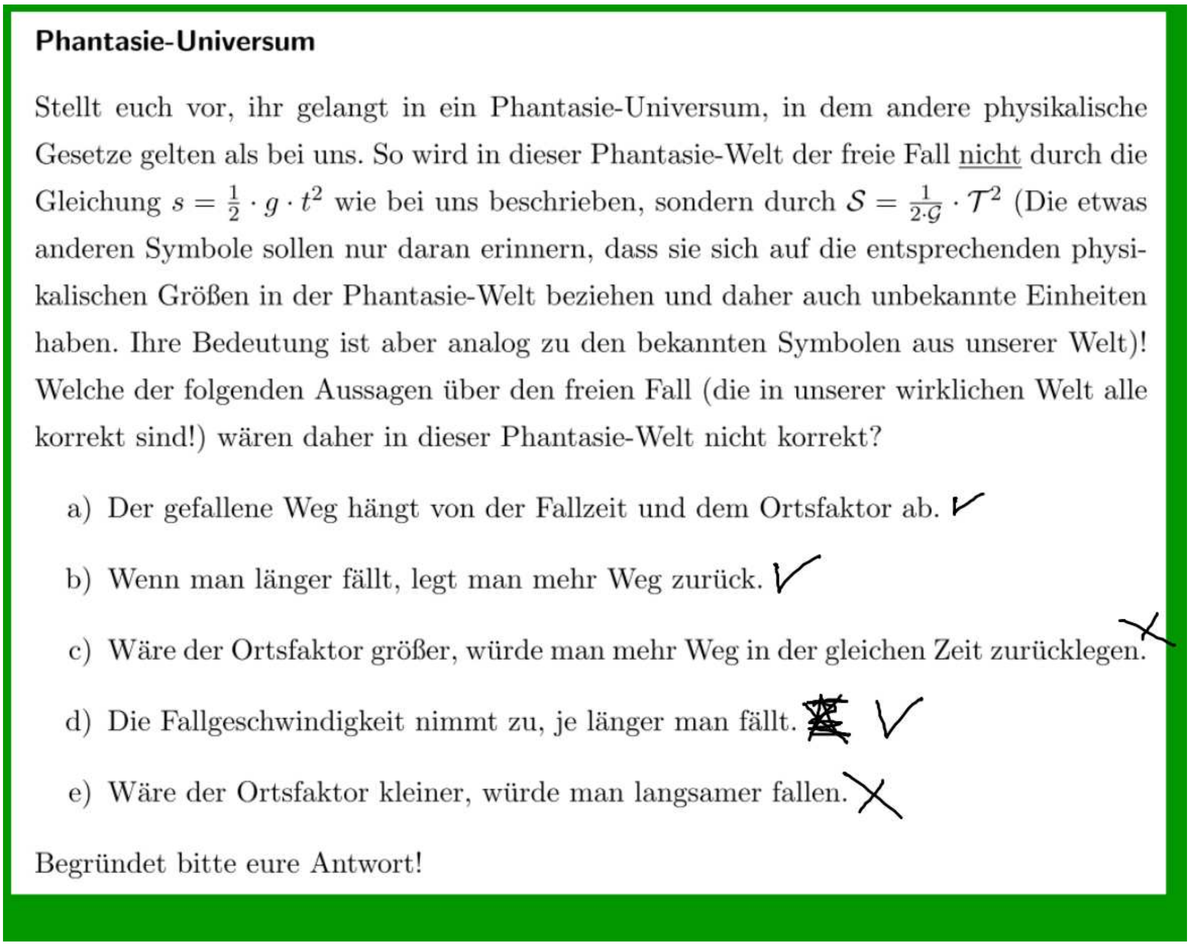
10.1.2. Aufgabe: Phantasie-Universum

Zu der Aufgabe „Phantasie-Universum" wird die Bearbeitung von Anne und Julia analysiert. Das Tafelbild der Schüler ist in Abbildung 10.2 abgebildet, wobei die Kreuze und Häkchen von Julia angeschrieben wurden. Zu Beginn unterhalten sich Anne und Julia kurz über die Aufgabestellung und die Bedeutung der Symbole, bevor sie die erste Aussage bewerten. Dabei treten keine Probleme auf, die Abhängigkeit des Weges von Zeit und Ortsfaktor wird erkannt.

Bezüglich der zweiten Aussage ist Anne kurzzeitig verwirrt, ob „länger fallen" mehr Weg oder mehr Zeit bedeutet, sie wird aber sofort von Julia korrigiert und erkennt dann auch selbst, dass sich „länger" auf die Zeit bezieht[1]. Anschließend diskutieren Anne und Julia kurz, dass das Quadrat der Zeit nicht relevant ist, da es nur um eine unbestimmte Zunahme des Weges gehe. Die Lösung zu der Aussage b) erschließen sie sich schließlich darüber, dass der einzige Unterschied zur Erdgleichung die Position des Ortsfaktors ist, dieser aber für die Aussage keine Rolle spiele und die Aussage deshalb — da sie auf der Erde stimme — immer noch korrekt sein müsse.

> Julia: Bloß hier hast du ja Eins durch zweimal G. Das heißt, das wäre dann ein ganz anderer Einfluss. Aber das wird ja in dem Sinne in dieser Aufgabenstellung gerade nicht beachtet, ne? Wenn man länger fällt, legt man mehr Weg zurück, da ist ja erstmal nur S und T-Quadrat wichtig.
>
> Anne: Eben!
>
> J: Das heißt, das hier können wir mal außer acht lassen mit dem Eins durch zweimal G.

1 Es gibt auch einige andere Gruppen, bei denen Unklarheit darüber herrscht, ob „länger fallen" mehr Weg oder mehr Zeit bedeutet. Hier wird der Einfluss des Sprachverständnisses auf das Verständnis der Aufgabenstellung deutlich.



Phantasie-Universum

Stellt euch vor, ihr gelangt in ein Phantasie-Universum, in dem andere physikalische Gesetze gelten als bei uns. So wird in dieser Phantasie-Welt der freie Fall nicht durch die Gleichung $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ wie bei uns beschrieben, sondern durch $\mathcal{S} = \frac{1}{2 \cdot \mathcal{G}} \cdot \mathcal{T}^2$ (Die etwas anderen Symbole sollen nur daran erinnern, dass sie sich auf die entsprechenden physikalischen Größen in der Phantasie-Welt beziehen und daher auch unbekannte Einheiten haben. Ihre Bedeutung ist aber analog zu den bekannten Symbolen aus unserer Welt)! Welche der folgenden Aussagen über den freien Fall (die in unserer wirklichen Welt alle korrekt sind!) wären daher in dieser Phantasie-Welt nicht korrekt?

a) Der gefallene Weg hängt von der Fallzeit und dem Ortsfaktor ab.

b) Wenn man länger fällt, legt man mehr Weg zurück.

c) Wäre der Ortsfaktor größer, würde man mehr Weg in der gleichen Zeit zurücklegen.

d) Die Fallgeschwindigkeit nimmt zu, je länger man fällt.

e) Wäre der Ortsfaktor kleiner, würde man langsamer fallen.

Begründet bitte eure Antwort!

Abbildung 10.2.: Tafelbild von Anne und Julia zu der Aufgabe „Phantasie-Universum“. Julia hat mit schwarzer Farbe geschrieben.

A: Ich würde sagen, dass das stimmt.

J: Es stimmt immer noch, ne?

A: Weil hier (bezieht sich auf die Erdgleichung) ist das ja ähnlich. Also würde ich sagen das wird auch stimmen.

Anne und Julia lösen diese Aufgabe also nicht durch das Herstellen einer direkten Verbindung zwischen der Aussage und der mathematischen Struktur, sondern durch die Analogie zur Erdgleichung. Dies stellt ein legitimes Vorgehen dar, so dass kein Problem diagnostiziert werden kann. Es lässt sich allerdings der Hinweis entnehmen, dass Anne und Julia den direkten Zusammenhang zwischen der Aussage und der Gleichung nicht sofort erkennen.

Die dritte Aussage versucht Anne auch durch den Ansatz der Analogie zu beantworten, aber Julia schlägt vor, die Aussage mit einer Rechnung zu überprüfen.

> Anne: Ich würde sagen, dass c), ähm, nicht korrekt ist, weil mit dem G, weil das halt so im Nenner steht und hier ist das ja frei
>
> Julia: Weil...na. Wollen wir das mal mit irgendwelchen ausgedachten Werten durchrechnen?

Anschließend rechnen Anne und Julia mit dem Wert 2 für die Zeit T und dem Wert 10 für den Ortsfaktor G und erhalten als Ergebnis den Wert 0,2. Dieses Ergebnis vergleichen sie jedoch mit der Erdgleichung und dem Ortsfaktor $g = 9,81$, weshalb sie zu dem Schluss kommen, dass die Aussage c) nicht stimme, da der Weg bei einer Vergrößerung des Ortsfaktors kleiner werde. In diesem Fall ist ein Problem aufgrund des schematisch-technischen Vorgehens (9.2.3) entstanden, da Anne und Julia die Aussage nicht mehr nur auf die Phantasiegleichung bezogen haben.

Die vierte Aussage wird von Anne und Julia zunächst übersprungen, so dass sie sich der letzten Aussage e) zuwenden. Anne erkennt, dass „langsamer“ mit der Geschwindigkeit zusammenhängt und schlägt wieder eine Rechnung vor.

> Anne: Na...müssen wir mal durchrechnen.
>
> Julia: Na, aber wir haben ja keine Geschwindigkeit in unserer Formel. Das wäre ja irgendwas mit v bloß wir haben ja nur S, G und T.
>
> A: Na, du kannst das doch trotzdem ausrechnen.
>
> J: Naja, was willst du denn ausrechnen?
>
> A: Mit der Geschwindigkeit... wir haben die Gleichung. S ist der Weg, T ist die Zeit
>
> J: Ja.
>
> A: Und wenn du dann den Ortsfaktor hast, hast du den Weg und die Zeit. Und dann kannst du das umstellen und in die Formel v ist gleich s durch t einsetzen.

Hier zeigt sich wieder das Problem des schematisch-technisch orientierten Ansatzes (9.2.3), der zur Verwendung der Formel $v = s/t$ führt. Diese Formel für die Geschwindigkeit wird von Anne erinnert und auf den vorliegenden Fall angewandt, ohne zu beachten, dass es sich nicht um eine gleichförmige Bewegung handelt (Problem 9.2.1).

Mit dieser Formel rechnen Anne und Julia zuerst den Weg für die Werte $G = 5$ und

$T = 2$ aus und bestimmen damit für die Geschwindigkeit den Wert 0,2. Anschließend wiederholen sie die Rechnung für den „normalen" Ortsfaktor 9,81 und erhalten den Wert 0,1 für die Geschwindigkeit. Es wird allerdings aus dem Dialog nicht ersichtlich, ob Anne und Julia den Wert 0,1 durch eine korrekte oder zufällig durch eine fehlerhafte Rechnung erhalten haben. Durch den Vergleich der beiden Geschwindigkeitswerte gelangen sie zu dem Schluss, dass die Aussage e) falsch sei, da die Geschwindigkeit bei einem kleineren Ortsfaktor größer geworden sei.

In diesem Vorgehen von Anne und Julia zeigt sich sehr deutlich der schematisch-technisch orientierte Ansatz der beiden Schüler. Auch die Verwendung der Formel $v = s/t$ geschieht aufgrund von erinnertem Wissen ohne Bezug zu den physikalischen Bedingungen (9.2.1). Die Problematik, dass die Formel $v = s/t$ als allgemeingültiger Ausdruck für die Geschwindigkeit verstanden wird, offenbart im Zusammenhang mit der Aufgabe „Phantasie-Universum" einen interessanten Aspekt im Hinblick auf mögliche Ursachen dieses Problems. Der wünschenswerte Ansatz bei dieser Aufgabe ist, die Geschwindigkeit als zeitliche Änderungsrate des Weges zu begreifen. Diese Auffassung lässt sich sprachlich salopp durch „Strecke pro Zeit" ausdrücken, ebenso wie die Formel $v = s/t$ sprachlich als „Strecke durch Zeit" beschrieben wird. Diese Ähnlichkeit kann dazu beitragen, dass Schüler die Formel $v = s/t$ als allgemeingültig auffassen, da sie scheinbar die mathematische Umsetzung der zeitlichen Änderungsrate des Weges repräsentiert. Der feine Unterschied zwischen dem Bruch s/t und der zeitlichen Änderungsrate des Weges — der als $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ mathematisiert wird — könnte ein wesentlicher Grund für das Verständnisproblem der Schüler sein.

Zurück zu Anne und Julia: Nachdem sie auf die beschriebene Art und Weise die Aussage e) bewertet haben, betrachten sie die vierte Aussage d) und erkennen die Ähnlichkeit zu der zuvor bearbeiteten Aussage. Bei der Klärung der Umsetzung in eine Rechnung tritt kurzzeitig noch einmal Verwirrung bezüglich der vorherigen Aussage auf, da Julia meint, sie müssten die Aussage mit der „normalen" Welt vergleichen. Anne und Julia entscheiden sich dann aber, ihr Ergebnis zu Aussage e) nicht mehr zu ändern und wenden sich wieder der vierten Aussage zu.

> Julia: Jetzt müssen wir das eigentlich nochmal machen nur dass wir jetzt T verändern und nicht den Ortsfaktor. Ne? Wir verändern jetzt in der Gleichung T und setzen das dann in dieses v ist gleich s durch t ein. Und sind jetzt aber auf die Geschwindigkeit... oder?

Julia und Anne berechnen daraufhin die Geschwindigkeit für den Wert $T = 3$ und erhalten als Ergebnis den Wert 0,15, den sie mit dem bereits zuvor errechneten Wert 0,1 für $T = 2$ vergleichen. Damit bestätigen sie die Aussage, dass die Geschwindigkeit zunimmt, je länger man fällt. Diese Lösung ist analog zur Lösung der Aufgabe e), weshalb ebenfalls die gleiche Problematik des schematisch-technischen Ansatzes mit der Verwendung der erinnerten Formel $v = s/t$ in Erscheinung tritt (9.2.1).

Insgesamt lässt sich feststellen, dass Anne und Julia einem schematisch-technischen Vorgehen folgen. Bei der Bewertung der Aussage b) ist dies noch unproblematisch, bei der Aussage c) überlagert dieser Ansatz bereits die bewusste Auseinandersetzung mit dem Zusammenhang von Aussage und Gleichung. Bezüglich der letzten beiden Aussagen führt dieses Vorgehen schließlich dazu, dass die Formel $v = s/t$ im Widerspruch zur physikalischen Situation angewandt wird.

10.1.3. Aufgabe: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Zu der Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“ wird die Bearbeitung von Marie und Sara analysiert. Das Tafelbild der Schüler ist in Abbildung 10.3 abgebildet, wobei Marie mit weißer und Sara mit schwarzer Farbe geschrieben hat. Zu Beginn unterhalten sich die Schüler über die Bedeutung der Terme.

> Sara: Fangen wir mit 1/2 at^2 an.
>
> Marie: Das ist die umgestellte Formel für die Beschleunigung, die nämlich lautet: $a = 2s/(t^2)$.
>
> S: Ja und das heißt?
>
> M: Soweit habe ich das da. Ja, die physikalische Bedeutung, das ist halt...das was...sozusagen während der Bewegung passiert.
>
> S: Gut...also ich habe hingeschrieben, dass es im Prinzip die Strecke ist, wo der Körper beschleunigt werde.
>
> M: Genau.

In diesem Dialog ist die Beeinflussung der Interpretation durch die schulische Erfahrung mit Spezialfällen von Formeln (9.3.1) sehr deutlich. Sara und Marie kennen die Formel für den Weg bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung als $s = \frac{1}{2}at^2$. Diese Bedeutung übertragen sie auch auf den Term in der allgemeineren Formel. Marie sieht den Term sogar als umgestellte Version dieser ihr bekannten Formel an.

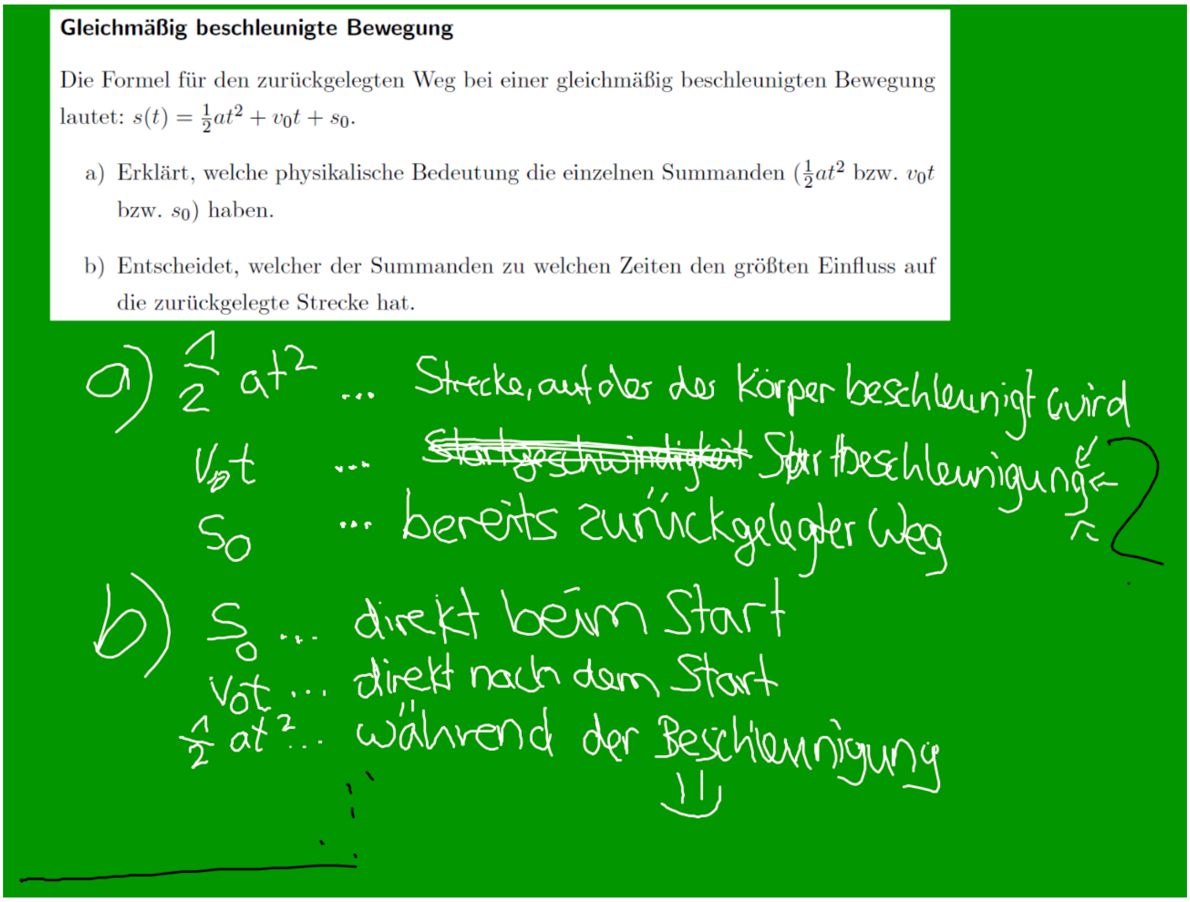


Abbildung 10.3.: Tafelbild von Marie und Sara zu der Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“. Marie hat mit weißer und Sara mit schwarzer Farbe geschrieben.

Marie schreibt als Bedeutung an die Tafel, dass der Term die Strecke angebe, auf der beschleunigt wird. Dann wenden sich die Schüler dem zweiten Term zu.

> Sara: Also, v_0t?
>
> Marie: Also v_0t ist die Startgeschwindigkeit.
>
> Sara: Warum ist das eigentlich die Startgeschwindigkeit? Das ist doch keine Geschwindigkeit allein. Das ist eine Zeit mal einer Geschwindigkeit und wenn die Geschwindigkeit nicht null ist, ist es wieder eine Strecke.

Marie assoziiert eine Bedeutung anhand der charakteristischen Größe des Terms (9.2.2), Sara fällt der Widerspruch zur mathematischen Struktur jedoch auf. Sie erkennt, dass dieser Term ebenfalls die Bedeutung einer Strecke hat.

Marie geht aber nicht auf Saras Argument ein, sondern erklärt zuerst die Bedeutung von s_0:

> Marie: Naja auf jeden Fall ist das, obwohl nein...
>
> Sara: Doch.
>
> M: s_0 ist nämlich...
>
> S: Ja na und...
>
> M: s_0 ist nämlich der bereits zurückgelegte Weg. Ich habe die Formel mal gelernt. Zumindest ein bisschen. Da ist die Geschwindigkeit und der bereits zurückgelegte Weg mit drin.
>
> S: Aber die Geschwindigkeit ist zurzeit doch null.
>
> M: Nö. Mit der Formel kannst du das auch aus der vollen Bewegung berechnen.
>
> S: Ach so.
>
> M: Das ist nämlich die Startgeschwindigkeit. (schreibt hinter „$v_0 t$...“: Startgeschwindigkeit)

Marie erkennt die Formel und erinnert sich daran, dass die Geschwindigkeit und der bereits zurückgelegte Weg enthalten sind. Bei Sara zeigt sich der Einfluss der schulischen Erfahrung mit Spezialfällen von Formeln (9.3.1). Ihr ist nur der Fall ohne Anfangswerte bekannt, weshalb sie die Geschwindigkeit zu Beginn bei Null sieht. Dies kann Marie aufgrund ihres Wissens korrigieren, woraufhin sie noch einmal mit Nachdruck ihre Vorstellung von $v_0 t$ als Startgeschwindigkeit betont.

Sara beharrt jedoch auf der Einbeziehung der Zeit. Daraufhin schlägt Marie vor, dass es sich bei dem Term um eine Startbeschleunigung handele und schreibt dies anstelle von „Startgeschwindigkeit“ an die Tafel. Dieser Vorschlag von Marie erscheint zunächst schwer nachvollziehbar, der weitere Verlauf der Diskussion lässt jedoch einen Grund vermuten. Die Startbeschleunigung ist als ein geratener Kompromiss zu begreifen, der daraus entsteht, dass Marie Saras Widerstand gegen die Nichtbeachtung der Zeit berücksichtigt, den Vorschlag der Bedeutung von $v_0 t$ als Strecke allerdings im Widerspruch zu s_0 sieht:

> Sara: Man nimmt die Geschwindigkeit mal eine Zeit...
>
> Marie: Und das ist der bereits zurückgelegte Weg (schreibt hinter „s_0...“:

bereits zurückgelegter Weg)

S: Ich überlege gerade. Wie ist denn das? ...Aber die Geschwindigkeit mal einer Zeit ist doch auch ein Weg, oder? ... Ist v_0 mal t nicht der Weg?

M: Na, was soll s denn sein?

S: Ja, dann ist das auch ein Weg...s ist v mal t...also muss das doch auch eine Strecke sein.

M: Das ist aber sinnlos, die gleiche Strecke zweimal zu nehmen.

S: Ja, aber es eine Strecke.

M: Da hätte man doch gleich s_0 mal 2...

Maries Widerstand gegen die Bedeutung von v_0t als Strecke liegt in ihrer damit einhergehenden Identifizierung von v_0t und s_0 begründet, wobei sie die Differenzierung zwischen der Funktionsvariablen t und der Konstanten s_0 nicht beachtet (9.1.7.c). Mit der Gleichsetzung von v_0t und s_0 erscheint Marie die Bedeutung einer Strecke als nicht sinnvoll, obwohl sie das Argument Saras, dass Geschwindigkeit mal Zeit eine Strecke darstellt, nicht entkräften kann.

Letztendlich können sich Marie und Sara nicht einigen, da Sara die Beschleunigung nicht akzeptiert. Sie sieht in der Bedeutung der Strecke v_0t allerdings auch den vorher zurückgelegten Weg und wechselt daher implizit die Rolle der Zeit von einer Funktionsvariablen zu einem Parameter (9.1.7.c) — der bereits verstrichenen Zeit. Damit kann sie Marie nicht überzeugen, so dass Sara ein Fragezeichen an die Tafel schreibt und sich die Schüler der Aufgabe b) zuwenden.

Bezüglich des Einflusses der Terme sind sich Marie und Sara nicht sicher. Sie betrachten allerdings nicht die mathematische Struktur, sondern bestimmen den Einfluss intuitiv aufgrund physikalischer Vorstellungen.

Sara: Wir müssen uns jetzt aussuchen welches von den dreien da...entweder am Anfang, am Ende oder in der Mitte ungefähr den größten Einfluss hat.

Marie: Keine Ahnung, aber am Anfang bestimmt die beiden Dinger hier...in der Mitte das.

S: Im Prinzip ist es doch so. In dem Augenblick wo wir starten ist es v_0 mal t, würde ich sagen.

M: Naja die beiden halt. Na klar, na gut...

> S: ...dann wenn wir beschleunigen ist es irgendwie 1/2 a mal t.

Aufgrund der Unsicherheit der Schüler mit der Aufgabe kommt das Problem der Determinierung der Mathematik durch die Physik (9.4.2) an mehreren Stellen zum Vorschein. Der Einfluss wird physikalisch betrachtet und die intuitiven physikalischen Vorstellungen zum Ablauf der Bewegung überlagern die mathematische Struktur. Zudem zeigt auch Sara im letzten Satz eine oberflächliche Verbindung des Terms $at^2/2$ zur Bedeutung des Beschleunigens (9.2.2).

Marie und Sara diskutieren noch kurze Zeit, sind sich dabei allerdings unsicher und finden keinen neuen Zugang. Daher einigen sie sich schließlich auf ihre intuitiv erstellte Reihenfolge, dass s_0 „direkt beim Start", v_0t „direkt nach dem Start" und $at^2/2$ „während der Beschleunigung" den größten Einfluss habe. Die intuitiv physikalische Betrachtung und oberflächliche Bedeutungsgebung entsteht bei diesem Aufgabenteil offensichtlich aus der Unsicherheit mit der Aufgabe. Den Zusammenhang zur Rolle der unterschiedlichen mathematischen Struktur der Terme — die Potenzen der Zeit t — erkennen Marie und Sara nicht.

Insgesamt zeigen sich bei dieser Aufgabe bei Marie und Sara die Probleme der Interferenz mit ihren schulischen Erfahrungen (9.3) und die Nichtbeachtung der mathematischen Struktur (9.1.7) als einflussreich. Marie hat die Formel zwar schon zuvor gesehen, deren Bedeutung allerdings nicht genau verstanden. Insbesondere der Term v_0t bereitet Schwierigkeiten aufgrund der Identifikation mit s_0. Die Unsicherheit sowohl bei der Bedeutungsgebung als auch bezüglich des Einflusses führt oftmals dazu, dass die Interpretation auf eine oberflächliche Assoziation ausweicht (9.2.2).

10.1.4. Aufgabe: Luftwiderstand

Zu der Aufgabe „Luftwiderstand" wird die Bearbeitung von Jana und Nadine analysiert. Das Tafelbild der Schüler ist in Abbildung 10.4 abgebildet, wobei Jana die drei Formeln mit weißer Farbe angeschrieben hat. Als ersten Ansatz fragt Nadine nach der Einheit von a_{Luft}, um dies als Zielvorgabe zum Aufstellen der Formel zu benutzen.

> Nadine: Okay, wie kriegen wir es hin? Dass wir die Einheit bekommen? Müssen wir gucken, bei der Dichte haben wir g durch...was war denn das? (lacht) Okay...Volumen durch Masse...das hilft uns nicht...(unverständlich) Dichte der Luft, das ist dann Null Komma nochwas...

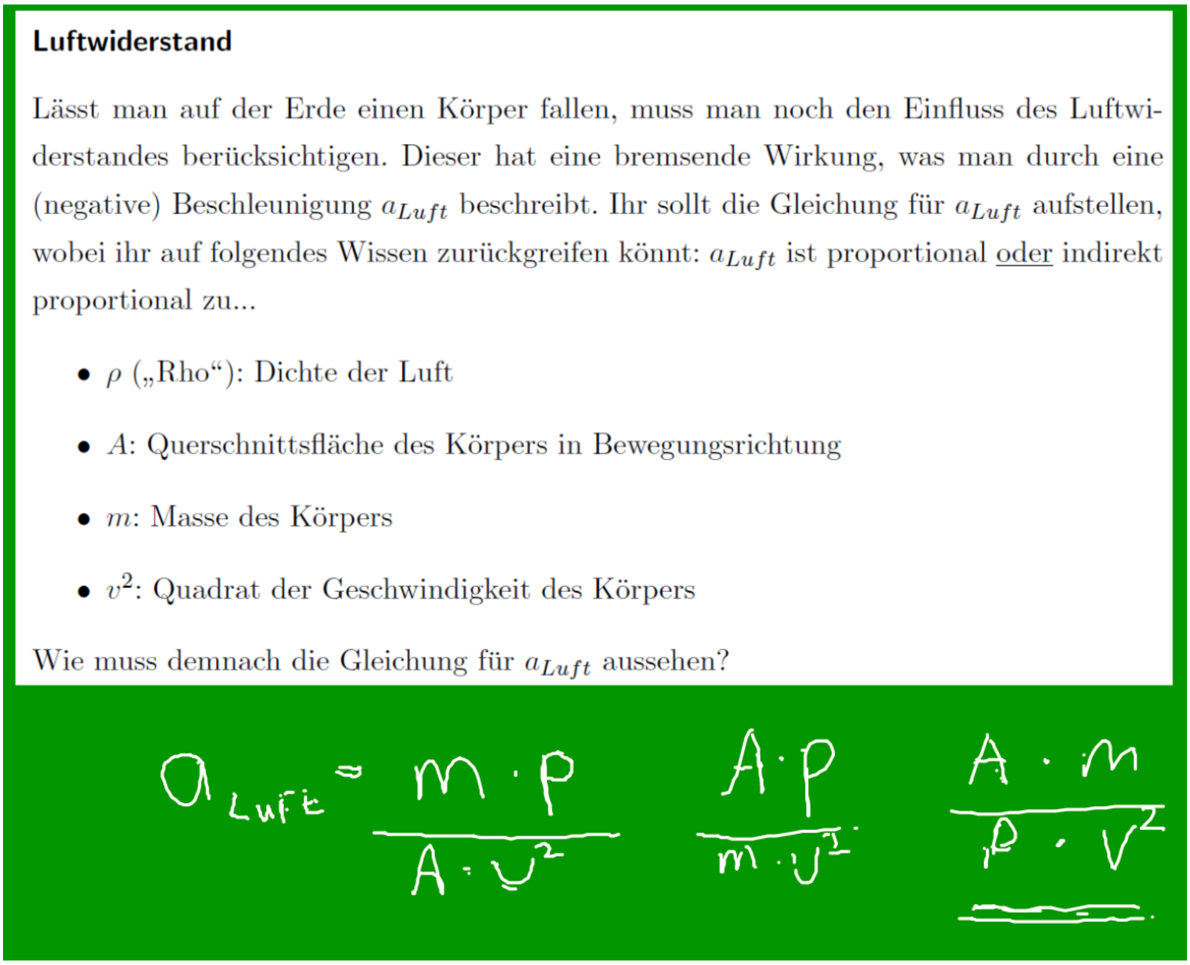


Abbildung 10.4.: Tafelbild von Jana und Nadine zu der Aufgabe „Luftwiderstand“. Jana hat mit weißer Farbe die drei Formeln angeschrieben.

Anstatt — wie es die meisten anderen Gruppen getan haben — zuerst den Einfluss der vier Größen physikalisch zu betrachten, orientiert sich Nadine sofort an einem schematisch-technischen Vorgehen (9.2.3). Allerdings bemerken die Schüler dann sehr schnell, dass es hilfreich ist, zuerst zu überlegen, ob die Größen in den Zähler oder den Nenner geschrieben werden müssen. Sie fangen an, die Proportionalität zu betrachten.

> Nadine: Also die Dichte steht proportional dazu...das müsste so sein.
>
> Jana: Also die Dichte nimmt zu.
>
> N: Dann wird der Körper langsamer
>
> J: ...wenn die Beschleunigung... Wieso nimmt die Dichte zu, wenn die Beschleunigung zunimmt?

Hier ist bei Jana das Problem der Abhängigkeit des Parameters vom Funktionswert (9.1.7.b) zu beobachten. Sie verwechselt die Richtung der Abhängigkeit in der aufzustellenden Gleichung und überlegt daher, wieso sich die Dichte aufgrund der Beschleunigung verändern sollte.

Nadine kann dieses Problem anschließend jedoch korrigieren und erklärt, dass der Körper langsamer werde, wenn die Dichte zunehme. Auch bezüglich der Querschnittsfläche folgern die Schüler, dass eine größere Fläche eine Verlangsamung bedeute. Da sie a_{Luft} scheinbar als positive Beschleunigung des Körpers begreifen und als synonym zur Geschwindigkeit ansehen, gelangen Jana und Nadine zu dem Schluss, dass beide Größen indirekt proportional seien.

In diesem Sinne bewerten die Schüler den Einfluss der Masse als proportional, da eine größere Masse schnelleres Fallen bedeute. Bezüglich der Geschwindigkeit gelangt Jana zu dem Schluss einer indirekten Proportionalität, allerdings wird hier wieder ihre Unsicherheit mit der Richtung der Abhängigkeit deutlich:

> Jana: ...nimmt ab (bezieht sich auf Geschwindigkeit), wenn der, wenn die Gegengeschwindigkeit...also auch indirekt
>
> Nadine: Ja. Luftwider...wenn Luft...
>
> Jana: Das eine nimmt zu, das andere nimmt ab.

Jana und Nadine haben alle Einflüsse im Bezug zur Fallgeschwindigkeit physikalisch richtig eingeschätzt, so dass eigentlich genau der Kehrwert der korrekten Gleichung entstehen müsste. Allerdings haben die Schüler Probleme damit, die erkannten Abhängigkeiten in eine Gleichung zu übertragen, da ihnen die mathematische Übersetzung einer Proportionalität in eine Gleichung nicht bekannt ist (9.1.4.a).

> Jana: Also...Luft...gleich...(lacht) gleich... (schreibt $a_{luft} =$)
>
> Nadine: Gleich, ok, na wenn, hilft uns die direkte Proportionalität oder ähnliches bei einer Gleichung?
>
> Jana: Weiß nicht...Masse durch...nee...Masse des Körpers...

Aufgrund dieser Problematik versucht Nadine, die physikalischen Zusammenhänge der Größen irgendwie zu nutzen.

> Nadine: Ich glaub das könnte mit dem zusammenhängen und das mit dem.
>
> Jana: Und wie machen wir das mit dem zusammen? Meinst p m mal...

N: Wieso? Ich hätte da...$p\ m$ kannst ja...

J: Äh, $\rho\ m$

N: ...kannst ja gar nicht zusammen machen. Denn das ist ja Masse des Körpers und das andere ist Dichte der Luft, das hat ja mit Luft zu tun...und ich bin im Masse des Körpers

Jana zeigt die Vorstellung von der Mathematisierung des „Zusammenhängens" durch eine Multiplikation (9.1.2.a). Dies weist Nadine zurück, allerdings nicht aufgrund des von Jana in dem Produkt gesehenen Zusammenhangs. Stattdessen sieht sie den Widerspruch in ihrer Vorstellung, dass physikalische Größen, die sie sich auf unterschiedliche physikalische Dinge beziehen, nicht in einem Produkt zusammenhängen dürfen (9.1.2.b).

Nach diesem Dialog gehen die Schüler wieder zu einem schematisch-technischen Vorgehen über (9.2.3). Sie betrachten die Einheiten und versuchen diese passend zu kürzen und Nadine schlägt vor, einfach alles zu multiplizieren. Jana versucht noch, Zusammenhänge der Größen untereinander herzustellen, worauf Nadine bemerkt, dass alle Größen miteinander etwas zu tun hätten, da sie in einer Formel sein sollten. Schließlich schlägt Nadine $\rho Am/v^2$ vor.

Daraufhin fängt Jana wieder an, die Einheiten zu betrachten. Die weitere Diskussion — die sechs Minuten von insgesamt zwölf Minuten Bearbeitungszeit ausmacht — dreht sich nur noch um das Überprüfen der Einheiten und Hin- und Herschieben der Größen, um die Einheiten passend zu machen. Das technische Vorgehen zur Einheitenrechnung verdrängt jeglichen Bezug zur physikalischen Bedeutung (9.2.3), so dass die ursprünglich gemachten physikalischen Überlegungen keine Rolle mehr spielen. Im Verlauf der Diskussion entstehen drei Vorschläge für a_{Luft} (vgl. Tafelbild 10.4), die allesamt aus der (fehlerbehafteten) Einheitenrechnung hervorgehen:

1. $\frac{m\cdot\rho}{A\cdot v^2}$
2. $\frac{A\cdot\rho}{m\cdot v^2}$
3. $\frac{A\cdot m}{\rho\cdot v^2}$

Bei der letzten Version haben die Schüler das Gefühl, dass die Einheiten passen und sie beenden die Aufgabe.

Insgesamt zeigt sich an dem Fallbeispiel von Jana und Nadine, wie die mangelnde Sicherheit beim Übersetzen ihrer physikalischen Überlegungen in die mathematische Struktur dazu führt, dass die Schüler auf ein rein technisch orientiertes Vorgehen ausweichen. Die physikalischen Überlegungen waren im Prinzip alle korrekt, mit dem einzigen Problem, dass Jana und Nadine in Bezug zur Geschwindigkeit argumentieren. Dies hätte bei einer sicheren Übersetzung allerdings zu dem Kehrwert der korrekten Gleichung führen können. Aufgrund der Problematik, die analysierten Zusammenhänge zu mathematisieren, haben Jana und Nadine jedoch ihre physikalischen Überlegungen bei dem anschließenden technischen Vorgehen völlig außer Acht gelassen und auch am Ende keinen Bezug mehr dazu hergestellt.

10.2. Diskussion der Problemfelder bei strukturellen Fähigkeiten

Der Problembereich der strukturellen Fähigkeiten ist besonders relevant für die Fragestellung nach den Übersetzungsproblemen der Schüler. Hier sind die Probleme verortet, die direkt die Verbindung von physikalischer Bedeutung und mathematischer Struktur betreffen. Sie stellen daher den wichtigsten Beitrag zur Analyse des Vorwissens der Schüler zur Verbindung von Physik und Mathematik dar und liefern die Basis für die unterrichtliche Umsetzung einer konzeptuell-mathematischen Physik. Zudem zeigen die Probleme auf, welche Versäumnisse der gängige Unterricht aufweist und wie die Auswirkungen eines instrumentellen Verständnisses von dem Gebrauch der Mathematik aussehen können.

Besonders gravierend und im Kontrast zur korrekten Bedeutung erscheinen die Auffassungen der Schüler zu einem Produkt als Funktion (9.1.8). Um die physikalische Bedeutung eines Produktterms verstehen zu können, sind zwei grundlegende Zusammenhänge wichtig. Zum einen drückt dieses Produkt eine andere physikalische Größe aus und zum anderen liefert es eine Beschreibung der Abhängigkeit dieser anderen Größe von den als Faktoren auftauchenden Größen. Diese beiden Aspekte sind elementare Voraussetzungen um beispielsweise den Term $v \cdot t$ als „die aufgrund der Geschwindigkeit in einer bestimmten Zeit zurückgelegte Strecke“ zu begreifen.

Wie sollen aber die Schüler diesen zwingenden Zusammenhang von physikalischer Bedeutung und der entsprechenden mathematischen Struktur verstehen können, wenn sie sich den Term $A \cdot t$ als Ausdruck für die Abhängigkeit der Größe A von der Zeit vorstellen (9.1.8.a)? An dieser Stelle scheint der grundlegende Zusammenhang von den Schülern nicht verstanden worden zu sein, dass sich die Abhängigkeit einer physikalischen Größe von einer anderen durch eine Funktionsgleichung mathematisieren lässt.

Die fünf identifizierten Probleme zu diesem Problemfeld beziehen sich letztendlich auf diese Problematik der Mathematisierung von Abhängigkeiten. Dabei besteht bei den ersten beiden Problemen (9.1.8.a und 9.1.8.b) die Vorstellung der Bedeutung des Terms $A \cdot t$ als $A(t)$, bei den folgenden beiden Problemen (9.1.8.c und 9.1.8.d) die Vorstellung als $t(A)$. Die eigentlich zwingende mathematische Struktur für diese Vorstellungen ist die Separierung beider Größen durch ein Gleichheitszeichen ($A = \ldots t \ldots$ bzw. $t = \ldots A \ldots$) — ein Zusammenhang, den einige Schüler nicht verstanden haben.

Diese gegenseitige Abhängigkeit der Faktoren eines Produktes zeigt sich auch in dem fünften Problem (9.1.8.e) dieses Problemfeldes, bei dem eine Größenänderung eines Faktors eine Änderung der Größe des anderen Faktors bedeutet. Hier wird die Vorstellung der Abhängigkeit zwar nicht explizit geäußert, durch die Argumentation der Beeinflussung der einen Größe durch die andere wird die Vermischung von Produkt und Funktion ersichtlich.

Interessant ist ein Vergleich mit dem Problemfeld der problematischen Vorstellungen zur Bedeutung eines Produktes zweier physikalischer Größen (9.1.2), bei dem die Schüler das Produkt als einen Ausdruck für Zusammengehörigkeit begreifen. Die beiden Problemkategorien beschreiben Auffassungen, nach denen die durch ein Produkt verbundenen physikalischen Größen irgendwie zusammenhängen (9.1.2.a) oder sich auf den gleichen physikalischen Körper beziehen müssen (9.1.2.b). Diese Vorstellungen hängen zwar nicht direkt mit der Auffassung eines Produktes als Funktion (9.1.8) zusammen, es lassen sich aber Parallelen erkennen.

So drückt auch die funktionale Abhängigkeit eine Art Zusammengehörigkeit physikalischer Größen aus. Wenn die eine Größe von der anderen abhängt oder diese beeinflusst, dann gehören beide Größen in gewissem Sinne „zusammen“. Diese in der Auffassung eines Produktes als Funktion implizit zum Ausdruck kommende Vorstellung passt zu der explizit geäußerten Vorstellung von der Zusammengehörigkeit der in einem Produkt stehenden Größen. Insofern weisen beide Problemfelder (9.1.2) und (9.1.8) eine gemeinsame Problematik aus, die darin besteht, dass die Schüler die mathematische Struktur des Produktes physikalischer Größen mit der Vorstellung eines gewissen Zusammenhangs zwischen beiden Größen in Verbindung bringen.

Mit dieser Gemeinsamkeit stellt sich auch eine Verbindung zu dem Problemfeld der problematischen Vorstellungen zu einem Verhältnis zweier physikalischer Größen (9.1.1) her, bei dem ebenfalls eine mathematische Struktur — das Verhältnis zweier Größen —

als Hinweis für einen Zusammenhang gesehen wird. Die Analogie zu den explizit geäußerten Vorstellungen zum Zusammenhang bei einem Produkt (9.1.2) ist deutlich ersichtlich, bei beiden mathematischen Strukturen scheinen die Schüler eine Verbindung der Größen untereinander zu sehen.

Allerdings haben sich in den Daten keine Probleme zur Struktur des Verhältnisses gezeigt, die analog zu der Auffassung eines Produktes als Funktion (9.1.8) sind. So konnte nicht beobachtet werden, dass die Schüler ein Verhältnis als Ausdruck für eine der beiden Größen aufgefasst haben oder eine direkte Abhängigkeit der einen Größe von der anderen geäußert haben. Wie das Problem des starren Verhältnisses (9.1.1.b) aufzeigt, besteht eher die Vorstellung eines statischen Zusammenhangs, der qualitativ anders als der funktionale — dynamische — Zusammenhang bei dem Produkt ist. Trotzdem wäre es interessant, diesen Aspekt in einer weiteren Studie genauer zu untersuchen, da nur bei der Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“ explizit nach der Bedeutung der Terme gefragt wurde. Eine ähnliche Aufgabe zu einer Formel, in der Verhältnisse auftreten, wurde nicht gestellt.

Ein weiteres wichtiges Problemfeld betrifft die Nichtbeachtung der Eigenschaften einer Funktion (9.1.7). Die hier identifizierten Probleme hängen ebenfalls mit den Problemen zur Auffassung eines Produktes als Funktion (9.1.8) zusammen, allerdings auf eine andere Art als die Vorstellungen zur Bedeutung des Produktes als Zusammenhang. Die Gemeinsamkeit besteht an dieser Stelle in der unangemessenen Behandlung der mathematischen Struktur der Funktion. Während jedoch bei der Auffassung eines Produktes als Funktion die funktionale Abhängigkeit eigentlich nicht existiert, beziehen sich die Probleme zur Nichtbeachtung der Eigenschaften einer Funktion auf die existierende mathematische Struktur einer Funktion.

Bei diesen Problemen liegt also eine Funktion vor, was den Schülern aber nicht bewusst zu sein scheint oder zumindest nicht beachtet wird. Dadurch ziehen die Schüler problematische Schlussfolgerungen und haben Schwierigkeiten, die Bedeutung der Funktionsterme zu verstehen. Die Probleme sind allerdings so geartet, dass eine Beachtung der Funktionseigenschaften nicht direkt eine Lösung der Probleme darstellen würde, sondern eher als Hinweis auf die Ungültigkeit der geäußerten Vorstellungen und Schlussfolgerungen dienen könnte.

Insbesondere zwei grundlegende Eigenschaften einer Funktion scheinen einigen Schülern nicht bewusst zu sein. Zum einen ist das die Rollenverteilung und Bedeutung von Funktionswert, Funktionsvariable und Parameter — (9.1.7.a), (9.1.7.b) und (9.1.7.c)

—, zum anderen die Eigenschaft gleicher Einheiten bzw. gleicher physikalischer Bezüge von Funktionswert und allen Summanden einer Funktionsgleichung — (9.1.7.a) und (9.1.7.d).

Aufgrund der Nichtbeachtung der Eigenschaften der mathematischen Struktur können die Schüler diese nicht unterstützend für ihr Verständnis nutzen. Die Interpretation der Schüler ist oftmals durch ein intuitives physikalisches Herangehen geprägt, bei dem sie sich die Bedeutungen von Funktionstermen zu erschließen versuchen, ohne die mathematische Struktur mit einzubeziehen. So kommt es beispielsweise ohne Beachtung der unterschiedlichen Rolle von Funktionsvariable und Parameter zu der Identifizierung von $v_0t = s_0$. Die Interpretation der Gleichung zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung stellt bei einer Unkenntnis der Formel natürlich eine Herausforderung dar. Allerdings zeigt sich in den Problemen der Schüler, dass sie die mathematische Struktur nicht als unterstützenden Anker benutzen, sondern stattdessen Ideen äußern, die im Widerspruch dazu stehen.

Ebenso könnte das Beachten des gleichen physikalischen Bezuges jedes Summanden in einer Funktion die Schüler beispielsweise davor bewahren, den Term v_0t mit der Änderung der Geschwindigkeit in Verbindung zu bringen und damit implizit mit at zu verwechseln. An diesem Beispiel zeigt sich allerdings auch die enge Verflechtung verschiedener Probleme miteinander. Das ursächliche Problem liegt an dieser Stelle nämlich hauptsächlich in dem Problemfeld zum Konzept der Änderungsrate und zugehörigen mathematischen Strukturen (9.1.6). Es zeigt sich hierin die implizite Unterscheidung zwischen dem Begriff Beschleunigung und der Änderungsrate der Geschwindigkeit (9.1.6.b).

Dieses Problem ist zudem als Manifestation der Schwierigkeiten anzusehen, die aufgrund der in Kapitel 3.3 diskutierten dualen Natur von Geschwindigkeit und Beschleunigung als zugleich physikalisches und mathematisches Konzept entstehen. Wie dort bereits erwähnt, ist der Beschleunigungsbegriff laut Hewitt (2006) so schwierig zu verstehen, weil die Beschleunigung die Rate einer Rate ist. Die Beschleunigung ist die zeitliche Änderungsrate der Geschwindigkeit, die ebenfalls eine Rate ist, nämlich die zeitliche Änderungsrate des Ortes.

Genau diese duale Natur der Beschleunigung scheint den Schülern Schwierigkeiten zu bereiten. Scheinbar verbinden die Schüler die Beschleunigung nur mit dem physikalischen Aspekt, die ebenso zwingende mathematische Natur als Änderungsrate wird mit der Beschleunigung nicht verknüpft. Dadurch können die Schüler die Argumentation aufbauen, nach der der Term $v_0 t$ die Änderung der Geschwindigkeit darstelle, da sich die Geschwindigkeit aufgrund der Beschleunigung verändere. Die Beschleunigung erscheint nur als physikalische Ursache für eine Geschwindigkeitsänderung, die damit einhergehende mathematische Repräsentation wird nicht gesehen.

Ebenso ist die Vorstellung, s_0 könne die konstante Wegzunahme aufgrund der beschleunigten Bewegung darstellen (9.1.6.a), mit der Problematik der Verbindung von physikalischer Bedeutung und mathematischer Struktur von Änderungsraten verknüpft. Insofern kann die bereits theoretisch diskutierte und von Hewitt (2006) erklärte Schwierigkeit auch in den empirischen Daten der Studie gefunden werden und unterstreicht damit die Bedeutung der physikalisch-mathematischen Natur für das Verstehen dieser Konzepte.

Zum Abschluss dieser Diskussion der verschiedenen Problemfelder bei den strukturellen Fähigkeiten verbleiben noch die Probleme mit der Verwendung des neutralen Elements (9.1.5), die Probleme beim Mathematisieren von Proportionalität (9.1.4) sowie die Vorstellungen zum Ausdruck von Wichtigkeit in mathematischen Strukturen (9.1.3). Die im letztgenannten Problemfeld verorteten Vorstellungen zur Wichtigkeit zeigen ein sehr diffuses Verständnis von der Bedeutung mathematischer Strukturen, die generell als Hinweis auf wenig elaborierte strukturelle Fähigkeiten angesehen werden können. Es sind sehr elementare Zusammenhänge von Bedeutung und Mathematik, die von den Schülern nicht verstanden werden.

Die Ansicht, die direkte Proportionalität sei wichtiger als die indirekte Proportionalität (9.1.3.b), ist auch ein Ausdruck für Probleme im Umgang mit der Bedeutung von Proportionalität. Aus der Perspektive des physikalischen Mathematisierungsmodells ist hier die Verbindung von Proportionalität mit einem niedrigeren Mathematisierungsniveau problematisch, da physikalische Zusammenhänge mit Proportionalität verbunden werden sollen. Probleme bezüglich der Verbindung zu einem höheren Mathematisierungsniveau — der weiteren Mathematisierung von (indirekt) proportionalem Verhalten — sind dagegen im Problemfeld zum Mathematisieren von Proportionalität (9.1.4) enthalten.

Hier zeigen die Schüler Schwierigkeiten, die erkannten (indirekt) proportionalen Zusammenhänge in eine Gleichung zu übersetzen. Sie wissen teilweise nicht, was die Proportionalität im Hinblick auf die mathematische Beschreibung bedeutet. Bei einigen Schülern zeigt sich dagegen, dass der Zusammenhang von Proportionalität und der Verwendung der Multiplikation unklar ist. So kann es auch zu einer Verwendung der Addition kommen.

An dieser Stelle zeigen sich elementare Verständnisschwierigkeiten beim Umgang mit der Mathematik, die die sinnvolle Mathematisierung physikalischer Zusammenhänge beeinträchtigen. Es stellt sich die Frage, ob die Schüler auch bei typischen proportionalen Zusammenhängen in der Physik, wie dem Ohm'schen Gesetz $U = RI$, überhaupt eine konkrete Vorstellung davon haben, was die Formel physikalisch über die Abhängigkeit von Stromstärke und Spannung aussagt. Bei Vorliegen des Problemfeldes zum Mathematisieren von Proportionalität (9.1.4) liegt die Vermutung nahe, dass auch das Ohm'sche Gesetz nur eine Rechenformel darstellt, die nicht mit physikalischem Verhalten in Verbindung gebracht wird.

Als letztes Problemfeld sind die Probleme mit der Verwendung des neutralen Elements (9.1.5) zu diskutieren. Hier zeigt sich eine sehr spezifische Ausprägung der problematischen Verbindung von mathematischen Elementen mit physikalischer Bedeutung. Die Schüler haben teilweise erhebliche Probleme, eine physikalische Situation, in der keine Bewegung stattfindet, durch eine Null zu mathematisieren. Der Null wird eine Art Sonderrolle zugeschrieben, die nicht die logische Fortführung verlangsamter Bewegung bis zum Stillstand darstellt. Dabei scheint diese Problematik auch dadurch begründet zu sein, dass die Schüler diesen Grenzfall nicht gewohnt sind zu diskutieren und zu mathematisieren, wie sich aus dem Zögern und Unbehagen der Schüler bei der entsprechenden Situation der Aufgabe „Zwei Massen" vermuten lässt.

Einhergehend mit diesem Unbehagen und Ungewohnten der Null (9.1.5.a und 9.1.5.b) treten grundsätzliche Probleme zur Bedeutung und Unterscheidung der neutralen Elemente der Addition und Multiplikation (9.1.5.c) in Erscheinung. Ebenso die Eins wie die Null scheinen die Bedeutung von „Nichts" zu haben. Die feine Unterscheidung, nach der die Null die Bedeutung des „Nichts" im Sinne einer Menge repräsentiert und die Eins bzw. die Null die Bedeutung des „Nichts" im Bezug auf die Auswirkung bei einer Multiplikation bzw. Addition haben, ist den Schülern nicht bewusst. Damit kann auch die Bedeutung des Kürzens als Umwandlung in eine Eins wegen deren Bedeutung als „Nichts" im Bezug zur Auswirkung von Multiplikation (bzw. Division) nicht von den Schülern verstanden werden.

Abschließend lässt sich feststellen, dass die hier diskutierten Problemfelder zum Bereich der strukturellen Fähigkeiten verschiedene Aspekte beleuchten, die insgesamt die Schwierigkeit einer inhaltlichen Verbindung von physikalischer Bedeutung und mathematischen Strukturen aufzeigen. Die Schüler haben teilweise erhebliche Probleme, elementare Zusammenhänge zwischen Bedeutung und Mathematik herzustellen und beziehen daher diese Verbindung in ihre Überlegungen oftmals nicht mit ein. Dadurch kommt es zu Widersprüchen in der Argumentation sowie massiven Problemen, sich die Bedeutung der physikalischen Formeln zu erschließen.

Allerdings ist zu beachten, dass die gezeigte Problematik bei den strukturellen Fähigkeiten eng mit einem mangelnden Verständnis hauptsächlich der mathematischen Grundlagen zusammenhängt. So hatten sich bereits bei der ersten schriftlichen Aufgabe Probleme beim Umgang mit Funktionen im mathematischen Kontext gezeigt (s. Kap. 7.2.2). Die Schüler hatten mehrheitlich Probleme, einer Funktionsgleichung eine mathematische oder anschauliche Bedeutung zu geben. Im Lichte dieser Ergebnisse ist es verständlich, dass Problemfelder wie die Nichtbeachtung der Eigenschaften einer Funktion (9.1.7) oder die Auffassung eines Produktes als Funktion (9.1.8) beim Übersetzen zwischen Physik und Mathematik auftreten.

Es zeigen sich demnach sowohl im mathematischen Kontext als auch im Bereich struktureller Fähigkeiten teilweise erhebliche Verständnisprobleme bezüglich des Gebrauchs und der Bedeutung von Funktionen. Damit ist einerseits die Forderung an den Mathematikunterricht verknüpft, die entsprechenden Grundlagen zu legen. Andererseits ist diese Thematik auch für die Physikdidaktik relevant, da der funktionale Zusammenhang physikalischer Größen eine der bedeutendsten mathematischen Strukturen für den Physikunterricht darstellt. Wenn die Verwendung physikalischer Formeln auf Verständnis basieren soll, muss insbesondere die (physikalische) Bedeutung mathematischer Funktionen von den Schülern verstanden werden — eine Aufgabe, die nicht nur an den Mathematikunterricht delegiert werden sollte.

11. Betrachtung der unterstützenden Funktion einer Verbindung zwischen Physik und Mathematik

In den vorigen drei Kapiteln wurde die Hauptfragestellung dieser Studie ausführlich beleuchtet. Die identifizierten Probleme wurden vorgestellt, analysiert und mit Fallstudien unterlegt. Es haben sich Probleme in allen Bereichen des revidierten Modellierungskreislaufs gezeigt. Die Probleme bezüglich der strukturellen Fähigkeiten deuten auf sehr grundlegende Verständnisschwierigkeiten hin. Dies führt unter anderem dazu, dass die Schüler auf ein schematisch-technisches Vorgehen ausweichen. Zudem scheint die Mathematik nur schwer als Unterstützung für das physikalische Verständnis genutzt werden zu können, da oftmals der inhaltliche Zusammenhang nicht verstanden wird.

Allerdings geht es bei diesen Problemen teilweise um sehr detaillierte Zusammenhänge zwischen der physikalischen Bedeutung und mathematischen Strukturen. Es stellt sich trotzdem die Frage, ob und wie die Schüler die Verbindung von Physik und Mathematik hilfreich nutzen können. Auch wenn Verständnisprobleme bezüglich der strukturellen Fähigkeiten bestehen, kann das Herstellen einer Verbindung eine Unterstützung darstellen und eventuell dabei helfen, die Probleme zu beheben. Aus diesem Grund geht es in diesem Kapitel um die zweite Fragestellung:

2. Wie kann die Verbindung von Physik und Mathematik hilfreich für die Schüler sein?

Zuerst werden einige methodische Vorbemerkungen zum Ansatz der Beantwortung der Fragestellung sowie zur Auswertung und Validierung der Ergebnisse gemacht. Es folgt die Vorstellung der Ergebnisse mit anschließender Interpretation und Diskussion.

11.1. Methodische Vorbemerkungen

Die Fragestellung kann nur in einigen Aspekten beleuchtet werden. Dazu werden die Lösungsprozesse der Schüler bei der Aufgabe „Zwei Massen“ näher analysiert (siehe Abb. 11.1). Diese Aufgabe eignet sich besonders dazu, den Abgleich der Schüler zwischen mathematischer und physikalischer Argumentation zu untersuchen. Auf der einen Seite ist eine rein physikalische Betrachtung möglich: Es ist eine Art physikalisches Experiment beschrieben und durch die Zeichnung veranschaulicht, so dass das Vernachlässigen der liegenden Masse direkt als freier Fall und das Vernachlässigen der hängenden Masse als keine Bewegung erkannt werden kann.

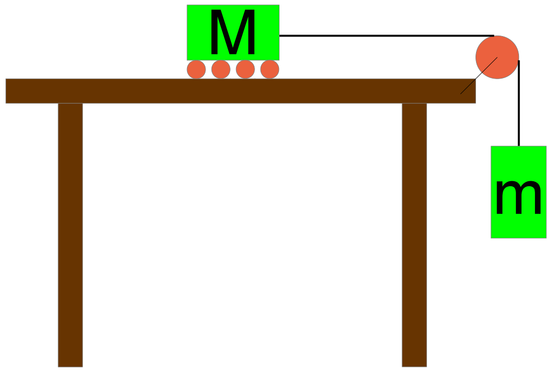
Auf der anderen Seite ist auch eine rein mathematische Behandlung möglich. Die Formel für die Beschleunigung ist gegeben und durch Identifizieren der entsprechenden Masse mit der Null ergeben sich schnell die Resultate $a = g$ bzw. $a = 0$. Insofern bietet die Aufgabe „Zwei Massen“ sowohl einen qualitativ-physikalischen als auch einen mathematischen Zugang. Die Aufgabenstellung ist dabei so formuliert, dass einerseits anhand der Formel die Beschleunigung bestimmt, das Ergebnis dann jedoch im Hinblick auf die Physik bewertet werden soll.

Durch die Übersichtlichkeit sowohl der physikalischen als auch mathematischen Situation ist es möglich, zwischen beiden Blickpunkten zu wechseln und die Argumentationen aufeinander zu beziehen. Zudem sind keine detaillierten Bedeutungszuweisungen spezieller mathematischer Strukturen erforderlich, so dass der Zusammenhang zwischen Physik und Mathematik auf einem gröberen Niveau hergestellt werden muss — im Prinzip geht es um die Interpretation mathematischer Ergebnisse.

Um dem Aspekt der „Verbindung“ in der Forschungsfrage nachzukommen, werden alle Transkripte zu der Aufgabe „Zwei Massen“ dahingehend analysiert, ob die Schüler einen Abgleich zwischen der qualitativ-physikalischen und der mathematischen Argumentation herstellen. Dabei ist ein Abgleich in dem Sinne zu verstehen, dass beide Argumentationen aufeinander bezogen werden. Dafür ist es ausreichend, wenn beispielsweise zum Ergebnis der ersten Teilaufgabe gesagt wird: „Das ist auch sinnvoll, denn das fällt im freien Fall.“. Nicht ausreichend für das Vorliegen eines Abgleichs ist dagegen, wenn zum Beispiel am Ende nur intuitiv „Ja, das ist sinnvoll, glaube ich.“ oder ähnliches gesagt wird. Es muss erkennbar sein, dass die Schüler einen Zusammenhang zwischen dem mathematischen Ergebnis (oder der Rechnung) und der physikalischen Bedeutung herstellen.

Zwei Massen

Zwei Körper der Massen M bzw. m sind wie auf der Abbildung miteinander verbunden:



Der Körper der Masse M ist auf Rädern gelagert und mit einem Seil über eine Umlenkrolle mit dem Körper der Masse m verbunden, welcher frei in der Luft hängt. Die Räder und die Umlenkrolle sind so gut gelagert, dass die Reibung vernachlässigt werden kann. So lange der Körper M festgehalten wird, bewegen sich die Körper nicht. Wenn aber M losgelassen wird, beschleunigen beide Körper mit der Beschleunigung $a = \frac{m}{M+m} \cdot g$, wobei g die Fallbeschleunigung ist.

a) Betrachtet anhand der Formel, wie groß die Beschleunigung beider Körper ist, wenn die Masse M des rollenden Körpers vernachlässigbar klein ist.

b) Betrachtet anhand der Formel, wie groß die Beschleunigung beider Körper ist, wenn die Masse m des hängenden Körpers vernachlässigbar klein ist.

Sind eure Ergebnisse physikalisch sinnvoll?

Abbildung 11.1.: Aufgabe „Zwei Massen“ zum Interpretieren der Grenzfälle der halben Atwood’schen Fallmaschine.

Um zu erfassen, wie der Abgleich hilfreich sein kann, werden die Lösungen der Schüler im Hinblick auf zwei Kriterien untersucht. Zum einen liefert die Korrektheit der Lösungen eine Einschätzung, ob die Schüler die Aufgabe bewältigen konnten. Wenn hier ein Zusammenhang mit dem Herstellen eines Abgleichs besteht, können Rückschlüsse auf die hilfreiche Funktion des Abgleichs gezogen werden. Für eine genauere Betrachtung ist es zudem wichtig, die Probleme der Schüler zu betrachten und zu untersuchen, ob ihnen der Abgleich dabei geholfen hat, diese Probleme zu bewältigen.

Zur Bewertung der Korrektheit der Schülerlösungen wird das mathematische Ergebnis herangezogen. Es liefert eine eindeutige Einordnung und ist zudem das vorrangige Ziel der beiden Teilaufgaben. Insofern muss bei der Teilaufgabe a) das Ergebnis $a = g$ und bei der Teilaufgabe b) das Ergebnis $a = 0$ von den Schülern angeschrieben worden sein, damit die Lösung als korrekt eingestuft wird.

Um den Einfluss des Abgleichs auf die Bewältigung von Fehlern und Problemen zu untersuchen, werden die Transkripte näher betrachtet. Darin lässt sich das Auftreten von Problemen identifizieren und deren Einfluss auf den Lösungsprozess erkennen. Die Schülerpaare werden für jeden Aufgabenteil danach eingeordnet, ob Probleme bestanden, ob sie behoben werden konnten und ob der Grund dafür in einer Verbindung zwischen der physikalischen Bedeutung und der mathematischen Bearbeitung liegt oder nicht. Dabei ist zu bemerken, dass die Auffassung von Problemen diesmal nicht wie bei der Problemanalyse auf Übersetzungsprobleme beschränkt ist, sondern auch rein mathematische oder physikalische Fehler enthalten kann.

Zur Absicherung der Ergebnisse ist in diesem Fall die Überprüfung der Reliabilität wichtig. Es muss sichergestellt werden, dass die Einordnung der Schülerlösungen nach den verschiedenen Kriterien zuverlässig und unabhängig vom Analysierenden ist. Um dieser Forderung nachzukommen, ist eine Interrater-Überprüfung angebracht. Die Schülerlösungen werden von zwei Experten unabhängig voneinander eingeordnet und die Resultate miteinander verglichen.

Aufgrund des hohen Zeitaufwandes der Analyse aller fünfzehn Transkripte und der notwendigen Vertrautheit mit der Thematik für die Identifizierung des „Abgleichs“ müssen zwei Einschränkungen für die Interrater-Überprüfung gemacht werden. Zum einen werden nur die sieben kürzesten Transkripte für die Einordnung durch beide Interrater ausgewählt. Zum anderen kann es aufgrund der geringeren Vertrautheit des Zweitkorrektors mit der Thematik dazu kommen, dass ein Problem oder ein Abgleich nicht identifiziert wird. Daher werden die Fälle ungleicher Einordnung anhand der Transkripte eingehend diskutiert, um unterschiedliche Auffassungen von „Problem“ und „Abgleich“ auszuschließen und eine Einigung zu erzielen. Das Resultat der Interrater-Überprüfung wird im folgenden Abschnitt im Zusammenhang mit den Ergebnissen erläutert.

Die Validität der Ergebnisse ergibt sich ebenfalls aus der Interrater-Überprüfung sowie aus der Validität der Problemanalyse zur ersten Forschungsfrage. Die Gültigkeit der Konstrukte der Verbindung zwischen Physik und Mathematik als auch der Probleme hängen eng mit der Problemanalyse zusammen und wurden in diesem Zusammenhang bereits validiert. Die Probleme, die sich bei der Aufgabe „Zwei Massen“ für die zweite Forschungsfrage relevant zeigen, bestehen hauptsächlich aus dem Problemfeld zur Verwendung des neutralen Elements (9.1.5) sowie aus Fehlern bezüglich der mathematischen Korrektheit (9.4.4). Weiterhin ist die Validierung durch einen unabhängigen Analysierenden in der Interrater-Überprüfung ebenfalls ein Ausdruck für die semantische Gültigkeit der Analyse.

11.2. Ergebnisse

Die Ergebnisse der Einordnung der Schülergruppen in die Kategorien „Korrekte Lösung", „Abgleich" und „Problembehebung" werden für die Teilaufgaben a) und b) getrennt dargestellt. Dabei wird für die Aufgabe a) keine Einordnung bezüglich der Problembehebung vorgenommen, da diese Aufgabe von dreizehn der fünfzehn Gruppen zumeist auf Anhieb korrekt gelöst wurde. Die nähere Untersuchung des Zusammenhangs zwischen dem Herstellen eines Abgleichs und dem Beheben eines Problems lässt sich nur für die Aufgabe b) sinnvoll durchführen. Abschließend folgt die Darstellung der Ergebnisse der Interrater-Überprüfung bezüglich aller Einordnungen.

Die Ergebnisse der Auswertung zur ersten Teilaufgabe sind in Tabelle 11.1 angegeben. Es zeigt sich deutlich, dass die Schüler wenig Schwierigkeiten hatten. Insgesamt dreizehn der fünfzehn Gruppen haben die Aufgabe korrekt gelöst. Davon haben sechs Gruppen einen Abgleich hergestellt und sieben Gruppen nicht. Die beiden Gruppen, die die Aufgabe nicht korrekt gelöst haben, haben keine Verbindung zwischen der physikalischen Bedeutung und der mathematischen Bearbeitung hergestellt.

Die Ergebnisse für die Teilaufgabe b) sind in Tabelle 11.2 dargestellt. Insgesamt neun Gruppen haben die Aufgabe korrekt gelöst, sechs Gruppen nicht. Dabei haben zehn Gruppen einen Abgleich hergestellt, während fünf Gruppen keine Verbindung zwischen der mathematischen Rechnung und der physikalischen Bedeutung gezogen haben. Es zeigt sich ein deutlicher Zusammenhang zwischen dem Herstellen eines Abgleichs und der Korrektheit der Lösung in beiden Richtungen. So haben acht der neun Gruppen, die die Aufgabe korrekt gelöst haben, auch einen Abgleich hergestellt. Ebenso haben acht der zehn Gruppen, die einen Abgleich hergestellt haben, die Aufgabe korrekt gelöst, während von den fünf Gruppen, die keinen Abgleich hergestellt haben, nur eine Gruppe die Aufgabe korrekt lösen konnte.

Die deutlich positive Auswirkung eines Abgleichs auf die Korrektheit der Lösungen lässt

Anzahl der Gruppen	Lösung korrekt ($a = g$)	Lösung nicht korrekt
Abgleich hergestellt	6	0
Kein Abgleich hergestellt	7	2

Tabelle 11.1.: Kreuztabelle zum Zusammenhang zwischen der Korrektheit der Lösung und dem Herstellen eines Abgleichs für die erste Teilaufgabe.

Anzahl der Gruppen	Lösung korrekt ($a = 0$)	Lösung nicht korrekt	Problem behoben
Abgleich hergestellt	8	2	7 von 9 Problem durch Abgleich behoben
Kein Abgleich hergestellt	1	4	1 von 5 Problem ohne Abgleich behoben

Tabelle 11.2.: Kreuztabelle zum Zusammenhang zwischen der Korrektheit der Lösung, dem Beheben eines Problems und dem Herstellen eines Abgleichs für die zweite Teilaufgabe.

sich durch eine statistische Analyse der Häufigkeiten bestätigen. Dabei sind die Bedingungen für einen χ^2-Test allerdings nur teilweise erfüllt. Zwar lassen sich die Gruppen eindeutig nur einer Merkmalskombination zuordnen, aufgrund der geringen Stichprobengröße von $N = 15$ treten jedoch in drei Zellen Häufigkeiten kleiner als fünf auf. Daher ist eine exakte Analyse nach dem Fisher-Yates-Test nötig (Bortz et al., 2008, S. 110). Dieser ergibt für Tabelle 11.2 eine Zufallswahrscheinlichkeit von $P = 0,0470$, so dass der positive Zusammenhang zwischen Abgleich und Korrektheit auf dem 5%-Niveau ($\alpha = 0,05$) als signifikant gilt. Damit lässt sich der ϕ-Koeffizient als Maß für die Effektgröße berechnen. Bei der exakten Analyse nach dem Fisher-Yates-Test wird dazu ein Vergleich mit der Standardnormalverteilung herangezogen, so dass sich für die positive Auswirkung des Abgleichs auf die Korrektheit der Lösungen $\phi = 0,43$ ergibt (Bortz et al., 2008, S. 327 u. S. 634). Nach der Konvention von Cohen (1988)[1] lässt sich damit ein mittlerer bis starker Zusammenhang feststellen ($0,3 < \phi < 0,5$).

Aufgrund der geringen Stichprobengröße von $N = 15$ ist die statistische Analyse jedoch mit Vorsicht zu interpretieren. Eine abweichende Kreuztabelle, bei der nur eine Gruppe anders eingeordnet oder wegfallen würde, kann die statistischen Ergebnisse bereits erheblich verändern, so dass kein signifikanter Zusammenhang mehr festgestellt werden könnte. Daher basiert die weitere Analyse und Interpretation der Ergebnisse im folgenden Abschnitt 11.3 auf den absoluten Häufigkeiten. Durch eine genaue Analyse der von einem perfekten Zusammenhang abweichenden Gruppen lassen sich interessante Erkenntnisse gewinnen und die Aussage der positiven Auswirkung eines Abgleichs auf die Korrektheit erhärten. Die statistischen Daten sind dabei als weitere Bestätigung dieses Zusammenhangs aufzufassen.

Insgesamt zeigt das Verbinden von mathematischer und physikalischer Argumentation einen deutlich positiven Effekt auf die Korrektheit der Lösungen. Daran lässt sich bereits vermuten, dass das Herstellen eines Abgleichs einen hilfreichen Einfluss auf den Lösungsprozess der Schüler hat. Dieser Zusammenhang wird durch die Analyse des Einflusses des Abgleichs auf die Behebung von Problemen bestärkt.

Demnach hatten insgesamt vierzehn Gruppen Probleme bei der Aufgabe, nur eine Gruppe — die ihre Ergebnisse sofort mit physikalischer Bedeutung in Verbindung gebracht hat — konnte problemlos eine Lösung erarbeiten. Von den vierzehn Gruppen mit Problemen konnten acht Gruppen ihre Probleme beheben und zu einer korrekten Lösung gelangen. Von diesen acht Gruppen haben sieben Gruppen einen Abgleich vollzogen und ihre Probleme durch das Herstellen einer Verbindung zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischer Rechnung behoben. Nur eine Gruppe konnte ihre Probleme ohne einen Abgleich lösen.

Das Resultat der Interrater-Überprüfung ist in Tabelle 11.3 angegeben. Es wurde jeweils für Teilaufgabe a) und b) getrennt überprüft, ob die Einordnung bezüglich der Korrektheit der Lösung und dem Herstellen eines Abgleichs übereinstimmt. Zudem wurde für die Teilaufgabe b) die Identifizierung der Behebung von Problemen überprüft. Das jeweils zuerst angegebene Verhältnis gibt die Übereinstimmungsrate direkt nach der beidseitigen Einordnung an. Wurden nicht alle sieben Transkripte identisch eingeordnet,

1 Zitiert nach Sedlmeier und Renkewitz (2008, S. 572).

Übereinstimmungsrate	Teilaufgabe a)	Teilaufgabe b)
Korrektheit der Lösung	7/7	7/7
Herstellen eines Abgleichs	5/7 ⇒ 7/7	6/7 ⇒ 7/7
Beheben eines Problems	—	6/7 ⇒ 7/7

Tabelle 11.3.: Übereinstimmungsraten der Interrater-Überprüfung. Das erste Verhältnis gibt die direkte Übereinstimmung an, nach dem Pfeil ist die Übereinstimmung nach Diskussion angegeben.

wurden die abweichenden Fälle diskutiert, um Unachtsamkeiten und unterschiedliche Interpretationen auszuschließen.

Es zeigt sich, dass die Identifizierung der Korrektheit der Lösungen sehr zuverlässig ist. Bei beiden Teilaufgaben wurden alle Transkripte von beiden Analysierenden identisch eingeordnet. Bezüglich des Herstellens eines Abgleichs und dem Beheben von Problemen wurde ebenfalls eine hohe Übereinstimmung erzielt — fünf von sieben Transkripten bei Aufgabe a) und jeweils sechs von sieben Transkripten bei Aufgabe b) —, allerdings war eine Diskussion der abweichenden Fälle nötig. Hier stellten sich Unklarheiten bei der Auffassung von Abgleich und Problem bei dem Zweitkorrektor als ausschlaggebend heraus. Nach einer Klärung der Auffassung anhand der konkreten Fallbeispiele konnte der Einordnung des Hauptkorrektors zugestimmt werden, so dass eine komplette Übereinstimmung erreicht wurde. Die Einordnung in die Kategorien Abgleich und Problembehebung kann daher ebenfalls als sehr zuverlässig eingestuft werden.

11.3. Interpretation der Ergebnisse

Aus einer ersten Betrachtung der Ergebnisse ergibt sich bereits der Eindruck, dass das Herstellen einer Verbindung zwischen der mathematischen Rechnung und der physikalischen Bedeutung eine positive Auswirkung auf die Lösungsprozesse der Schüler hat. Es zeigt sich zum einen ein Zusammenhang zwischen dem Herstellen eines Abgleichs und der Korrektheit der Lösung sowie zwischen dem Herstellen eines Abgleichs und der Behebung von Problemen. Zunächst wird anhand beider Teilaufgaben der Zusammenhang von Abgleich und Korrektheit näher diskutiert, bevor anhand der zweiten Teilaufgabe der Zusammenhang zwischen Abgleich und Problembehebung analysiert wird.

Dabei ist zu beachten, dass die Rückschlüsse aus der positiven Korrelation zwischen dem Herstellen eines Abgleichs und der Korrektheit der Lösung zwei mögliche Interpretationen zulassen. So kann die positive Auswirkung des Abgleichs ebenso als explizite wie als implizite Unterstützung gewertet werden. Explizit meint, dass das Verbinden der mathematischen Rechnung mit physikalischer Bedeutung einen direkten Einfluss auf das Gelingen der Bearbeitung hat. Das ist der Fall, wenn der Grund der korrekten Lösung in dem Herstellen eines Abgleichs liegt.

Implizit meint dagegen, dass zwar ein Zusammenhang zwischen dem Herstellen eines Abgleichs und der korrekten Lösung besteht, dieser aber über andere Einflüsse vermittelt werden kann. Zum Beispiel kann es sein, dass generell leistungsstarke Schüler auch den Abgleich eher in Betracht ziehen und sich daher ein Zusammenhang zwischen einer korrekten Lösung und dem Herstellen eines Abgleichs ergibt. Der Grund für das korrekte Lösen der speziellen Aufgabe „Zwei Massen“ liegt dann nicht explizit in dem Herstellen des Abgleichs, sondern generell in den guten physikalischen und mathematischen Fähigkeiten des Schülers — wozu das Herstellen eines Abgleichs auch gehört.

Die Ergebnisse zur ersten Teilaufgabe (vgl. Tabelle 11.1) lassen noch keine sicheren Rückschlüsse zum Zusammenhang zwischen Abgleich und Korrektheit zu. Von den dreizehn korrekten Lösungen wurden sechs unter Beachtung eines Abgleichs erarbeitet, sieben Gruppen haben keine Verbindung zwischen Physik und Mathematik hergestellt. Aufgrund des anscheinend geringen Schwierigkeitsgrades kann angenommen werden, dass einige Gruppen die Notwendigkeit eines Abgleichs nicht gesehen haben. Diese Annahme wird dadurch gestützt, dass die Anzahl der Gruppen, die einen Abgleich hergestellt haben, bei der zweiten Teilaufgabe auf zehn — im Vergleich zu sechs bei Aufgabe a) — ansteigt. Eine genauere Betrachtung der Daten zeigt in der Tat, dass vier Gruppen nur bei Aufgabe b) einen Abgleich vorgenommen haben.

Aufgrund der insgesamt guten Resultate bei Aufgabe a) und des geringen Schwierigkeitsgrades lassen die Ergebnisse keinen eindeutigen Einfluss eines Abgleichs erkennen. Allerdings stehen die Ergebnisse auch nicht im Widerspruch zu einer unterstützenden Funktion des Abgleichs, sie lassen vielmehr eine positive Tendenz erkennen. So haben alle Gruppen, die einen Abgleich hergestellt haben, auch eine korrekte Lösung erarbeitet. Die einzigen beiden Gruppen die keine korrekte Lösung erzielen konnten, haben dagegen keinen Abgleich hergestellt. Insofern sind die Ergebnisse immerhin im Einklang mit der Annahme — die durch Aufgabe b) bestätigt wird —, dass das Herstellen eines Abgleichs eine positive Auswirkung auf die Korrektheit der Lösung hat.

Bei der zweiten Teilaufgabe zeigt sich ein deutlicher Zusammenhang zwischen dem Herstellen eines Abgleichs und der Korrektheit der Lösung. Der Anteil der korrekten Lösungen an den Gruppen mit Abgleich beträgt 80% (8 von 10) und der Anteil der Gruppen mit Abgleich an den korrekten Lösungen 89% (8 von 9). Ebenso beträgt der Anteil der nicht korrekten Lösungen an den Gruppen ohne Abgleich auch 80% (1 von 5) und der Anteil der Gruppen ohne Abgleich an den nicht korrekten Lösungen 67% (4 von 6).

Diese deutlichen Zusammenhänge lassen die Annahme zu, dass das Herstellen einer Verbindung zwischen der mathematischen Rechnung und der physikalischen Bedeutung einen unterstützenden Einfluss auf das Erarbeiten einer korrekten Lösung hat. Wie eingangs erwähnt, ist damit jedoch noch nicht geklärt, ob die Unterstützung impliziter oder expliziter Natur ist.

Aus der Perspektive der Konsequenzen für das Physiklernen lässt sich allerdings auch ohne diese Unterscheidung eine Aussage treffen. Zwar scheint eine explizite Unterstützungsfunktion ein deutlicheres Plädoyer für das Herstellen einer Verbindung zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischen Strukturen zu sein, da somit direkt Probleme angegangen werden können und eine mögliche Hilfestellung für die Schüler vorliegt. Allerdings ist auch eine implizite Unterstützung als Plädoyer für das Lehren der Verbindung zu bewerten. Wenn ein genereller Zusammenhang zwischen den physikalischen und mathematischen Fähigkeiten eines Schülers und der Strategie des Herstellens eines Abgleichs besteht, so zeigt sich das Bewusstsein von der Verbindung zwischen Physik und Mathematik als Teilaspekt der physikalischen Fähigkeiten der Schüler und erfordert daher ebenfalls gezielte Förderung.

Gleichwohl würde das Identifizieren einer expliziten Unterstützung genauere Erkenntnisse über die Art und Weise des Einflusses des Abgleichs auf die Lösungsprozesse liefern. Zudem wäre damit eine weitere Bestätigung der Annahme gegeben, dass das Herstellen eines Abgleichs eine hilfreiche Funktion für die Schüler haben kann.

Um die Unterscheidung zwischen einer impliziten und einer expliziten Unterstützung vornehmen zu können, ist die Betrachtung des Aspekts der Problembehebung notwendig. Wenn Probleme durch das Herstellen einer Verbindung zwischen der mathematischen Argumentation und der physikalischen Bedeutung behoben werden, so hat der Abgleich einen direkten Einfluss auf das Gelingen der Bearbeitung. Die Ergebnisse zum Zusammenhang zwischen Abgleich und Problembehebung lassen somit einen Rückschluss auf eine explizite Unterstützung der Verbindung von Physik und Mathematik zu.

Diesbezüglich zeigen die Ergebnisse zur Teilaufgabe b) ebenfalls deutliche Zusammenhänge. Sieben der acht Gruppen, die einen Abgleich hergestellt und eine korrekte Lösung erarbeitet haben, hatten Probleme, die sie durch das Herstellen des Abgleichs beheben konnten. Dadurch, dass der Abgleich der Grund für die Behebung der Probleme war, zeigt sich die direkte Unterstützung der Verbindung von Physik und Mathematik für den Lösungsprozess. Im Kontrast dazu haben vier der fünf Gruppen, die keinen Abgleich hergestellt haben, auch keine korrekte Lösung erarbeiten können. Diese Gruppen konnten den Abgleich nicht zur Problembehebung nutzen und hatten keine andere erfolgreiche Strategie parat.

Das Herstellen eines Abgleichs scheint damit bei der zweiten Teilaufgabe der Aufgabe „Zwei Massen" das effektivste Mittel zur Behebung von Problemen zu sein. Nur die Gruppen — bis auf eine Gruppe (nähere Erläuterung siehe unten) —, die einen Abgleich hergestellt haben, konnten ihre Probleme lösen. Allerdings muss erwähnt werden, dass bei diesen Gruppen auch andere Strategien zum Einsatz kamen. Zum Beispiel haben einige Schüler einen Taschenrechner genommen, um zu überprüfen, ob eine Division von Null nicht definiert ist oder Null ergibt. Diese Strategie ist jedoch eng mit dem Abgleich verknüpft, da der Abgleich der Auslöser für die Überprüfung mittels Taschenrechner war. Insofern ist einschränkend zu sagen, dass der Abgleich nicht immer das alleinige Mittel zur Problembehebung war, jedoch immer eng damit verknüpft.

Es gibt drei Gruppen, die von einer perfekten Korrelation zwischen Abgleich und Problembehebung — bzw. auch zwischen Abgleich und korrekter Lösung — abweichen. Eine Gruppe hat ihr Problem behoben und die Aufgabe korrekt gelöst, ohne einen Abgleich herzustellen und zwei Gruppen hat auch der Abgleich nicht geholfen, ihre Probleme zu beheben. Die nähere Betrachtung dieser Fälle bestärkt die unterstützende Funktion des Abgleichs und liefert Erkenntnisse zu Bedingungen, die das Hilfreiche des Abgleichs wieder neutralisieren.

Bei der Gruppe, die ohne Abgleich ihr Problem korrigieren und die Aufgabe korrekt lösen konnte, ist einer der beiden Schüler sehr sicher in seinen mathematischen Fähigkeiten. Der andere Schüler ist dagegen eher unsicher und stößt auf das Problem, dass er $0/M$ als „nicht definiert“ ansieht — eine Verwechslung mit der mathematischen Regel „durch Null teilen ist nicht definiert“, wie sie bei mehreren Gruppen beobachtet werden konnte. Der andere Schüler ist sich seines mathematischen Wissens allerdings sehr sicher, so dass er seinen Partner umgehend korrigiert und auf sein Missverständnis aufmerksam macht.

Bei dieser Gruppe liegt also keine wirkliche Problembehebung in dem Sinne vor, dass ein gemeinsames Problem gelöst werden musste. Stattdessen hatte ein Schüler ein Problem, der andere jedoch nicht. Es ist daher anzunehmen, dass bei getrennter Bearbeitung der eine Schüler die Aufgabe nicht korrekt gelöst hätte, der andere Schüler dagegen ohne Probleme. Bei dieser Einordnung gäbe es dann keine Gruppe mehr, die ihre Probleme ohne Abgleich lösen konnte. Der eine Schüler, der die Aufgabe b) ohne Abgleich und ohne Probleme erfolgreich gelöst hat, ist in einer Linie mit den Erkenntnissen der Aufgabe a): Wenn der Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung für die Schüler niedrig ist, dann ist ein Abgleich nicht nötig. Der sichere Umgang des Schülers mit der Mathematik hat ausgereicht, um die Aufgabe b) ohne Probleme zu bewältigen.

Verbleiben noch zwei Gruppen, die trotz eines Abgleichs keine korrekte Lösung erarbeitet haben und ihre Probleme nicht beheben konnten. Bei näherer Betrachtung zeigt sich ein wichtiger Grund für die Erfolglosigkeit des Abgleichs: Die Schüler zeigen das Problem der Determinierung der Physik durch die Mathematik (9.4.1). Beide Gruppen erhalten das Ergebnis $a = g/M$ und passen durch eine ungenaue Beschreibung des physikalischen Verhaltens die Interpretation an das mathematische Ergebnis an. Die eine Gruppe sagt, dass sich „klein m ein M-tel zu g“ bewegt, die andere Gruppe — Nina und Katrin aus der Fallstudie in Kapitel 10.1.1 — sagt, der freie Fall würde gebremst. Diese Gruppe erkennt zwar später ihren Fehler, bezieht dann jedoch die Größe der anderen Masse M als veränderlich ein und nimmt eine Fallunterscheidung vor (vgl. Kapitel 10.1.1).

Das Problem der Determinierung des physikalischen Verhaltens durch die Mathematik zeigt sich als eine Problematik, die die hilfreiche Funktion der Verbindung von physikalischem Verhalten mit mathematischen Strukturen untergräbt. Die Schüler benutzen den Abgleich nicht, um ihr mathematisches Ergebnis zu hinterfragen, sondern vertrauen auf ihre mathematische Herleitung und passen die Interpretation dementsprechend an. Auf diesem Wege kann der Abgleich keine Unterstützung darstellen.

Insgesamt zeigt sich damit folgendes Bild: Bei leichtem Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung ist ein Abgleich nicht nötig, bei mittlerem Schwierigkeitsgrad dagegen können die Schüler ihre Probleme nur dann lösen, wenn sie eine Verbindung zwischen der mathematischen Rechnung und der physikalischen Bedeutung herstellen. Wenn sie diese Verbindung herstellen, wird dadurch auch das Problem behoben, wenn nicht das Problem der Determinierung der Physik durch die Mathematik vorliegt.

11.4. Analyse der Problembehebung

> „Dann haben wir a ist gleich Null mal g. a ist Null und es ist ja logisch, dass wenn da nichts dranhängt, dann bewegt sich das ja auch nicht.“

Das Zitat ist von einem Schüler der einzigen Gruppe, die kein Problem mit der zweiten Teilaufgabe hatte. Es zeigt, wie dieser Schüler sofort das mathematische Ergebnis mit der physikalischen Situation verbindet und damit eine Bestätigung seiner Herleitung erhält. In diesem Sinne stellt der Abgleich zwischen der mathematischen Bearbeitung und der physikalischen Bedeutung auch für andere Schüler eine hilfreiche Unterstützung zur Problembehebung dar. Sieben Gruppen hatten Unsicherheiten oder Probleme, konnte diese jedoch bewältigen, indem sie auf ähnliche Weise wie der obige Schüler eine Verbindung zur physikalischen Bedeutung hergestellt haben.

Die aufgetretenen Probleme betreffen zum Großteil das Problemfeld zur Verwendung des neutralen Elements (9.1.5) oder rein mathematische Schwierigkeiten, die allerdings auch mit der Null zusammenhängen. So haben einige Gruppen den Fall der Division von Null mit der Division durch Null verwechselt und waren sich nicht sicher, ob $0/M$ eventuell nicht definiert sei. Durch das Herstellen eines Abgleichs mit der physikalischen Situation konnte dieses Problem von den Gruppen, die den Abgleich vollzogen haben, behoben werden. Beispielhaft zeigt es sich in folgendem Dialog:

> S1: Aber ist das dann nicht Null durch M, und Null durch irgendwas ist Null, oder ist nicht definiert.
>
> S2: Ja, aber, du hast schon recht. Wenn hier Null ist, bewegt sich das ja nicht

S1: Ja.

S2: Also ist die Beschleunigung Null.

S1 ist sich nicht sicher, ob $0/M$ Null oder nicht definiert ist. S2 stellt jedoch die Verbindung zum physikalischen Verhalten her und erkennt, dass bei der Vernachlässigung der hängenden Masse auch keine Bewegung stattfindet. Daher gelangen die Schüler zu dem Schluss, dass die Beschleunigung Null sein muss. Die mathematische Unsicherheit konnte durch die Verbindung zur Physik ausgeglichen werden.

Bei anderen Gruppen traten weitere Probleme im Zusammenhang mit der Null auf. So zeigt das folgende Beispiel eine Gruppe, die sowohl die Verwechslung von 0 und 1 (9.1.5.c) als auch das Unbehagen mit der Null (9.1.5.a) als Problem hat. Die Schüler sind sich unsicher und versuchen eine Lösung zu finden. Der Bezug zum physikalischen Verhalten löst wiederum den Knoten und bestätigt S1 in seiner früheren Vermutung, dass das Ergebnis doch $a = 0$ sein muss.

S1: Beim Zweiten kommen ja die kleinen m's sozusagen weg. Aber jetzt bin ich mir unsicher, was für das kleine m über den Bruchstrich kommt. Eine 1 oder eine 0? Ich meine wenn eine Null kommen würde, würde die Beschleunigung, ähh Fallbeschleunigung Null sein. Ähh, ich mein die Beschleunigung. Das kann nicht sein.

S2: Ja, denn wenn die so klein ist um vernachlässigt zu werden, kann man ja eigentlich davon ausgehen, dass der nicht mehr nach unten gezogen wird von der Masse.

S1: Das ist auch richtig. Also gibt's keine Beschleunigung, oder wie? Demzufolge?

S2: Ja, an der Formel... (unverständlich)

S1: Ah genau, das stimmt dann ja. Dann hatte ich doch recht mit der Null.

S2: ...und bei b) gibt's dann keine Beschleunigung...

S1: Na das wäre dann, $a = 0$ durch groß M mal g. Ja und $0/M$ ist Null und das wäre dann Null mal g ist immer noch Null und demzufolge ist a ist gleich Null...Meter pro Sekunde hoch 2, obwohl das gerade nicht so wichtig ist (schreibt: $a = \frac{0}{M} \cdot g$, $a = 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)

S2: Na, da haben wir's ja.

Hier zeigt sich sehr deutlich, wie durch die Verbindung zum physikalischen Verhalten die ursprünglichen Unsicherheiten und Probleme gelöst werden und dadurch auch eine Sicherheit in der mathematischen Herleitung bewirken, wie sie S1 in seiner letzten Erklärung demonstriert. Der Sicherheit und Bestätigung gebende Effekt des Abgleichs — wie er auch bei dem eingangs zitierten Schüler festzustellen ist — beseitigt bei dieser Gruppe die Unklarheiten und lässt sie die korrekte Lösung und Herleitung erkennen.

In einer etwas anderen Art, mit größerem Fokus auf dem physikalischen Verhalten, zeigt sich die Verbindung von mathematischer und physikalischer Argumentation bei folgender Gruppe als hilfreich. Die Schüler zeigen zu Beginn ebenfalls ein leichtes Unbehagen mit der Null (9.1.5.a) und gehen daraufhin zu einer eingehenden physikalischen Analyse der Situation über. Dadurch versichern sie sich der Richtigkeit ihrer zuvor unsicheren Annahme, dass die Masse Null gesetzt wird, und gelangen zu der Schlussfolgerung $a = 0$.

> S1: Setzen wir das jetzt gleich Null?
>
> S2: Ja, das ist ja jetzt die Frage, wenn die Masse...
>
> S1: Wenn du sagst, dass die Masse gleich Null ist, dann hast du ja, also dann hast du ja auch keine Gewichtskraft
>
> S2: hm...hm
>
> S1: Dann hast du keine Kraft die nach unten zieht, dann hast du also auch keine Kraft die da lang zieht. (Zeigt in horizontaler Richtung.)
>
> S2: Also wenn wir da jetzt so eine Feder dran hängen haben. Ich meine, die wiegt ja dann schon was, aber das ist im Vergleich zu, wenn da ein fetter Stein liegt nix...
>
> S1: (Lacht) Nee, das ist wohl wahr.
>
> S2: Ähh, und dann ist die Gewichtskraft, also die Gewichtskraft die da dranhängt...
>
> S1: Da ist ja die Beschleunigung eigentlich gleich Null, wenn die Masse da Null ist.
>
> S2: Genau. Wenn die Masse da Null ist, dann zieht nix nach unten. Nach da, nach unten.
>
> S1: Also wäre a...

S2: ... gleich Null, oder? (schreibt: $a = 0$)

Bei diesen Schülern erfolgt allerdings keine saubere mathematische Herleitung der Lösung, was darin begründet sein kann, dass sie den mathematischen Zusammenhang von $m = 0$ zu $a = 0$ direkt erkannt haben. Trotzdem fällt auf, dass sie großes Gewicht auf die physikalische Betrachtung legen. Dadurch umgehen die Schüler die mathematische Rechnung und nutzen den Abgleich nur in einer Richtung. Die mathematische Unsicherheit wird durch die physikalische Analyse behoben, eine Überprüfung der physikalischen Analyse durch eine saubere mathematische Rechnung erfolgt nicht.

Generell ist bei der Problembehebung bei dieser Aufgabe festzustellen, dass eher mathematische oder die strukturellen Fähigkeiten betreffende Probleme durch einen Abgleich mit dem physikalischen Verhalten bewältigt werden. Der umgekehrte Fall, dass rein physikalische Probleme durch eine mathematische Überprüfung behoben werden, ist nicht zu beobachten. Dies liegt zum einen an der Richtung der Aufgabenstellung, die die Herleitung anhand der Formel fordert. Zum anderen ergibt sich die Hypothese, dass für die Schüler ein Abgleich mit der Physik tendenziell leichter zu vollziehen ist als ein Abgleich mit der Mathematik. Dies würde auch mit den bisherigen Erkenntnissen zusammenpassen, die die Rolle der Mathematik bei den Schülern eher als Recheninstrument denn als inhaltlich beschreibende Struktur begreift. Diese letztere Auffassung ist jedoch für die sinnvolle Nutzung der Mathematik zur Überprüfung der Physik nötig.

Als abschließendes Beispiel sei noch gezeigt, wie es dagegen ablaufen kann, wenn die Schüler keine Verbindung zur physikalischen Bedeutung herstellen. Die folgende Gruppe hat das Problem, dass sie die Nullen in dem Bruch kürzt und als Ergebnis $a = g/M$ erhält.

S1: Null... (schreibt: $a = \frac{0}{M+0} \cdot g$)

S2: ...durch M plus Null mal 9,81...

S1: Ja und das kürzt sich weg, wenn das geht. (streicht Nullen durch) Wir haben also... a gleich ein M-tel...mal g. (schreibt: $a = \frac{1}{M} \cdot g$) Das ist eigentlich sinnvoll, oder? Das ist schon sinnvoll, wenn keine Reibung vorhanden ist.

S2: Ja...

S1: Ja...

Die Schüler erarbeiten das Ergebnis $a = g/M$ und sagen, es sei sinnvoll. Es scheint jedoch eine rein intuitive Bewertung des Ergebnisses zu sein. Eine Interpretation als

Verbindung zum physikalischen Verhalten wird nicht vorgenommen, so dass der Fehler nicht bemerkt wird.

Die unterschiedlichen Beispiele illustrieren, wie hilfreich das bewusste Verbinden von mathematischer Bearbeitung und physikalischer Bedeutung für das Erkennen und Beheben von Problemen ist. Die vielfach zu beobachtenden Unsicherheiten und Probleme im Zusammenhang mit der Null konnten von den Gruppen, die einen Abgleich mit der physikalischen Bedeutung vorgenommen haben, behoben werden (wenn nicht das physikalische Verhalten durch die Mathematik determiniert wird). Die Verknüpfung von mathematischer Argumentation und physikalischer Bedeutung stellt sich als eine Unterstützung für die Schüler heraus, die ihnen dabei hilft, ihre Unsicherheiten zu beheben. Damit zeigt sich, dass die Verbindung von Physik und Mathematik nicht nur aus der theoretischen Perspektive der konzeptuell-mathematischen Physik zu fordern ist, sondern ebenso von den Schülern als hilfreiche Unterstützung bei der Untersuchung physikalischer Situationen erfahren werden kann.

Teil III.

Schluss

12. Zusammenfassung und Implikationen

Die in der Einleitung beschriebene Aussage, dass man immer *irgendwie* mit Mathematik zu tun hat, wenn man Physik betreibt, sollte in der vorliegenden Arbeit neu gedacht und untersucht werden. Die Elementarisierung der theoretischen Physik mit ihrer engen strukturellen Verflechtung von mathematischer Beschreibung und physikalischem Verhalten ist der Ansatz, der zu einer konzeptuell-mathematischen Physik führt, die die Rolle der Mathematik vornehmlich im Beschreiben und Untersuchen physikalischer Zusammenhänge sieht.

Mit dieser Zielsetzung wurde in einem ersten Teil der theoretische Rahmen bereitgestellt, in dem aus didaktischen und wissenschaftstheoretischen Gesichtspunkten das physikalische Mathematisierungsmodell und der revidierte Modellierungskreislauf für die Physik erarbeitet wurden. Die theoretischen Überlegungen wurden in die Aufgabenkultur eingebettet und mündeten in die Erarbeitung konzeptuell-mathematischer Physikaufgaben. Darauf aufbauend konnte in dem zweiten Teil dieser Arbeit die empirische Untersuchung vorgestellt werden, die die Bearbeitung dieser Aufgaben von Schülerpaaren analysiert hat. Das Resultat ist die Identifizierung und Klassifizierung von Problemen, die die Schüler beim Verbinden von mathematischen Strukturen und physikalischer Bedeutung haben. Zusätzlich konnten anhand der Aufgabe „Zwei Massen" Erkenntnisse zur hilfreichen Nutzung dieser Verbindung gewonnen werden.

In diesem, die vorliegende Arbeit abschließenden Kapitel werden die dargelegte Argumentation und die empirischen Erkenntnisse noch einmal reflektiert und zusammengefasst. Anschließend folgt die Erörterung didaktischer Implikationen für den Physikunterricht sowie ein Ausblick auf weitere Forschungsperspektiven und unbeantwortete Fragen.

12.1. Zusammenfassung

Wie bereits erwähnt, geht es in dieser Arbeit um die Erörterung und Untersuchung des Umgangs mit der Mathematik beim Lehren und Lernen von Physik. Da zu dieser Thematik bisher wenige Ergebnisse aus der physikdidaktischen Forschung vorliegen, war für die empirische Untersuchung eine qualitativ-explorative Analyse des Vorwissens der Schüler angebracht. Zuvor war jedoch die Erarbeitung eines eigenen theoretischen Rahmens notwendig, der in der konzeptuell-mathematischen Physik und dem physikalischen Mathematisierungsmodell bereit gestellt wird.

12.1.1. Theorie

Zur Begründung des theoretischen Rahmens wurde die Rolle der Mathematik in der Physik aus wissenschaftstheoretischer Sicht reflektiert. Es ergibt sich ein Bild, das die enge Verflechtung von physikalischer Analyse und mathematischer Beschreibung aufzeigt. Die Mathematik erscheint untrennbar mit der physikalischen Erkenntnisgewinnung verknüpft und kann als kreatives Element in der Untersuchung der Naturgesetze angesehen werden. Das Entdecken neuer Phänomene anhand mathematischer Betrachtungen ist hier ein besonders gewichtiges Argument für die strukturelle Verbindung beider Wissenschaften.

In diesem Sinne kann argumentiert werden, dass die Trennung in ein rein physikalisches und ein rein mathematisches Modell ein unangemessenes Bild von der Natur der Physik widerspiegelt. Um dem essentiell mathematischen Charakter der Physik Rechnung zu tragen, erscheint die Auffassung eines physikalisch-mathematischen Modells passender. Dabei ist diese Schlussfolgerung nicht nur aus dem Blickwinkel der Natur der Physik sinnvoll, sondern lässt sich auch aus didaktischer Perspektive begründen. Es wurde dargelegt, wie sich die Verflechtung von Mathematik und Physik bereits in elementaren physikalischen Konzepten wie Geschwindigkeit und Beschleunigung zeigt, die als zeitliche Änderungsraten ebenso mathematischer Natur sind.

Um die dargelegte Argumentation als einen — wenn auch sehr wichtigen — Aspekt zur Rolle der Mathematik in Physik und Physikunterricht zu kennzeichnen und zugleich eine Unterscheidung zur Rolle der Quantifizierung und Berechnung vorzunehmen, wurde die Unterscheidung in technische und strukturelle Fähigkeiten eingeführt. Dabei beinhalten die strukturellen Fähigkeiten die Übersetzung zwischen mathematischen Strukturen und physikalischer Bedeutung und beziehen sich auf die Verwendung der Mathematik zum Beschreiben und Modellieren. Die technischen Fähigkeiten dagegen sind als rein mathematische Kompetenz anzusehen und zielen auf den Gebrauch des mathematischen Kalküls ab.

Aufgrund dieser Erörterungen erweist sich der Modellierungskreislauf aus der Mathematikdidaktik als unzureichend, wenn das mathematische Denken in der Physik modelliert werden soll. Daher folgte die Entwicklung des physikalischen Mathematisierungsmodells, das die Trennung in physikalisches und mathematisches Modell zugunsten eines physikalisch-mathematischen Modells aufgibt. Durch die Einführung einer Dimension der Mathematisierung können verschiedene Mathematisierungsniveaus des physikalisch-mathematischen Modells dargestellt werden. Der rein qualitativen Beschreibung wird dabei durch das Anfangsniveau Rechnung getragen, dessen enge Verflechtung mit höher mathematisierten Niveaus jedoch deutlich wird.

Die Unterscheidung zwischen strukturellen und technischen Fähigkeiten findet sich in der Lokalisierung inner- und außerhalb des physikalisch-mathematischen Modells wieder. Während die strukturellen Fähigkeiten durch das Verbinden verschiedener Niveaus gekennzeichnet sind, verlassen die technischen Fähigkeiten das physikalisch-mathematische Modell hin zum rein mathematischen Bereich. Für eine genauere didaktische Analyse wurden als zusätzliche Unterscheidung zwischen „echter" und oberflächlicher Mathematisierung „gebogene Pfeile" eingeführt, die das physikalisch-mathematische Modell ebenfalls verlassen, dabei allerdings zwei Niveaus miteinander verbinden. Weiterhin konnte durch die Verbindung des qualitativen Niveaus des Modells mit dem Bereich der „Welt" das physikalische Mathematisierungsmodell in den Modellierungskreislauf integriert werden, so dass ein revidierter Modellierungskreislauf für die Physik entstanden ist.

Mit diesem Modell als Grundlage wurde in einem abschließenden theoretischen Kapitel die unterrichtliche Aufgabenkultur aus der Perspektive der konzeptuell-mathematischen Physik diskutiert. Die Schulbuchaufgaben wurden einer kritischen Analyse unterworfen und Verbesserungsvorschläge erarbeitet. Um die strukturellen Fähigkeiten noch stärker in den Vordergrund zu rücken und eine gezielte Analyse der dabei auftretenden Probleme und Schwierigkeiten in einer empirischen Untersuchung zu ermöglichen, wurden vier konzeptuell-physikalische Aufgaben entwickelt und diskutiert. Alle Aufgaben zielen dabei auf eine Übersetzung zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischen Strukturen ab, nehmen jedoch verschiedene Aspekte der strukturellen Fähigkeiten in den Fokus.

Das Ergebnis des theoretischen Teils dieser Arbeit ist die Theorie zur konzeptuell-mathematischen Physik, die in dem physikalischen Mathematisierungsmodell ihren Ausdruck findet und als Elementarisierung theoretischer Physik zu begreifen ist. Sie steht einerseits im Einklang mit der Natur der Physik, ist andererseits aber auch auf didaktischen Überlegungen und Erkenntnissen zur Problematik des gängigen Gebrauchs der Mathematik im Physikunterricht aufgebaut. Ebenso sind die Erkenntnisse und Forderungen der Mathematikdidaktik im Einklang mit den Konsequenzen der konzeptuell-mathematischen Physik.

12.1.2. Empirie

Mit dieser Theorie und den zugehörigen Modellen stand der Rahmen für die empirische Untersuchung bereit, so dass im zweiten Teil dieser Arbeit das Studiendesign und die Ergebnisse vorgestellt und diskutiert werden konnten. Der Fokus liegt dabei auf einer qualitativ-explorativen Analyse der Probleme und Vorstellungen der Schüler. Diese Zielsetzung folgt aus der enormen Bedeutung des Vorwissens der Schüler für konstruktivistisch aufgefasstes Lernen. Zudem nimmt dieser Aspekt in dem in der Physikdidaktik weit verbreiteten Modell der didaktischen Rekonstruktion ebenfalls eine zentrale Rolle für die Konzeption von Unterricht ein.

Um einen Beitrag zu diesem grundlegenden Baustein eines konzeptuell-mathematischen Physikunterrichts zu leisten, beschäftigte sich die Untersuchung hauptsächlich mit der Frage, welche Probleme sich im Verständnis der Schüler von der Verbindung zwischen Physik und Mathematik identifizieren lassen. Dazu wurden dreißig Schüler aus neunten und zehnten Klassen verschiedener Dresdener Gymnasien an die Universität eingeladen, um in Partnerarbeit an einer interaktiven Tafel die vier konzeptuell-mathematischen Physikaufgaben sowie eine normale und eine abgewandelte Schulbuchaufgabe zu bearbeiten. Die aufgezeichneten Diskussionen wurden transkribiert und bildeten das Material für die qualitative Datenanalyse.

Um eine Einschätzung der Stichprobe der teilnehmenden Schüler zu erhalten, wurden die Kontrollparameter Noten und fachliches Selbstkonzept erhoben sowie eine Frage zur Rolle von Formeln gestellt. Zudem mussten drei Aufgaben schriftlich und eine Schulbuchaufgabe an der Tafel bearbeitet werden. Es zeigte sich, dass die Schüler in der Tendenz als durchschnittlich bis gut einzustufen sind und bezüglich des Umgangs mit der Mathematik das aus anderen Forschungsergebnissen gewonnene Bild eines eher technisch orientierten Gebrauchs bestätigen. Insofern konnten die Schüler der Stichprobe als typisch in Bezug zur Fragestellung der Untersuchung eingestuft werden, so dass die diagnostizierten Probleme auch bei anderen Schülern zu erwarten sind. Überdies zeigten sich bereits im mathematischen Kontext Probleme im Umgang mit Funktionen.

Vor der Diskussion der Problemanalyse wurden noch die Ergebnisse zur abgewandelten Schulbuchaufgabe „Straßenüberquerung“ vorgestellt. Dabei zeigte sich, dass bereits durch den Verzicht auf gegebene Zahlenwerte und eine natürliche Aufgabenstellung eine Verbesserung der Strategien der Schüler festgestellt werden konnte. Anstatt nach dem Schema „gegeben-gesucht“ vorzugehen, fertigten fast alle Schüler eine Skizze zur Analyse der Situation an. Damit konnten die meisten Gruppen die Aufgabe korrekt lösen, als größtes Problem zeigte sich der exakte Umgang mit den geschätzten Zahlenwerten.

Anschließend wurde die Problemanalyse in drei Kapiteln vorgestellt. Zuerst erfolgten methodische Erläuterungen zur qualitativen Inhaltsanalyse und der Erarbeitung der Problemkategorien sowie eine Verortung der Probleme im revidierten Modellierungskreislauf. Daraus ergab sich bereits eine deduktive Klassifizierung der Probleme in die drei Problembereiche „Strukturelle Fähigkeiten“, „Schematisch-technischer Umgang“ und „Interferenz mit dem Erfahrungsbereich der Schüler“. Die zu erwartenden Probleme hinsichtlich physikalischer und mathematischer Korrektheit wurden einem vierten Bereich „Ergänzende Probleme“ zugeordnet.

Auch die Problemkategorien zum „Schematisch-technischen Umgang“ konnten bereits anhand des physikalischen Mathematisierungsmodells konkretisiert werden. Die drei gebogenen Pfeile dieses Bereichs deuteten bereits die Probleme des Erinnerns als Ersatz für Mathematisierung, der Assoziation als Ersatz für Interpretation und des schematisch-technischen Vorgehens unter Vernachlässigung der Bedeutung an. Diese drei Problemkategorien konnten einerseits alle in den Daten identifiziert werden, andererseits erfassten sie auch alle dem Problembereich „Schematisch-technischer Umgang“ zuzuordnenden Probleme.

Bezüglich des Problembereichs der „Interferenz mit dem Erfahrungsbereich der Schüler“ ergaben sich drei Problemkategorien. Die Auffassung physikalisch-mathematischer Modelle als exakte Beschreibung der Welt konnte ebenfalls als Problem mit der Idealisierung der Welt aus dem revidierten Modellierungskreislauf abgeleitet werden. Zudem zeigten sich Probleme aufgrund der schulischen Erfahrungen der Schüler mit Spezialfällen von Formeln sowie in konkreten Bezügen physikalischer Größen.

Der vierte Problembereich „Ergänzende Probleme“ musste noch um die Probleme der Determinierung des physikalischen Verhaltens durch die Mathematik und der umgekehrten Richtung, der Determinierung der Mathematik durch physikalische Vorstellungen, erweitert werden. Diese beiden Probleme zeigten sich im Zusammenspiel sowohl mit strukturellen Fähigkeiten als auch mit einem technischen Umgang. Die Schüler nehmen dabei entweder die Physik oder die Mathematik in den Fokus und ordnen den jeweils anderen Bereich diesem unter. Dadurch wird die hilfreiche Betrachtung aus der jeweils anderen Perspektive nicht ermöglicht. Eine generelle Disposition bestimmter Schüler für eine Richtung der Determinierung — was als „epistemological belief“ (Hammer, 1994) interpretiert werden könnte — konnte allerdings nicht festgestellt werden. Es scheinen eher situationale Bedingungen ausschlaggebend zu sein.

Bezüglich des für die Fragestellung besonders relevanten Problembereichs „Strukturelle Fähigkeiten“ ergaben sich acht Problemfelder mit jeweils zwei bis fünf Problemkategorien. Besonders gravierend erscheinen hier die Problemfelder der „Nichtbeachtung der Eigenschaften einer Funktion“ und der „Auffassung eines Produktes als Funktion“. Im Zusammenhang mit den Ergebnissen der ersten schriftlichen mathematischen Aufgabe zeigt sich dabei auch eine generelle Problematik bezüglich des Gebrauchs und der Bedeutung von Funktionen. Insgesamt lässt sich feststellen, dass teilweise grundlegende strukturelle Zusammenhänge zwischen der mathematischen Repräsentation und der physikalischen Bedeutung von den Schülern nicht verstanden werden. Die physikalische Aussage mathematischer Strukturen wird von vielen Schülern nicht beachtet oder erkannt, so dass der Eindruck eines fehlenden Bewusstseins für derartige Zusammenhänge entsteht. Von einem relationalen Verstehen der Mathematisierung der Physik kann bei diesen Schülern daher nicht ausgegangen werden.

In den anschließend vorgestellten Fallstudien zu den vier konzeptuell-mathematischen Physikaufgaben zeigten sich exemplarisch die Auswirkungen der identifizierten Probleme auf den Lösungsprozess der Schüler. Teilweise lag generell ein schematisch-technisch orientierter Ansatz vor, teilweise waren Probleme mit den strukturellen Fähigkeiten ausschlaggebend. Der Einfluss des Problems der Determinierung der Mathematik durch die Physik konnte bei der Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“ im Übergehen der mathematischen Struktur gesehen werden, die Determinierung der Physik durch die Mathematik zeigte sich in der Aufgabe „Zwei Massen“ im Anpassen der Interpretation an das mathematische Ergebnis.

Dieses Problem der Determinierung der Physik durch die Mathematik zeigte sich auch bei der Untersuchung der zweiten Fragestellung dieser Studie als Störfaktor für die unterstützende Funktion eines Abgleichs zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischer Bearbeitung. Es wurde anhand der Aufgabe „Zwei Massen“ untersucht, ob und wie die Verbindung zwischen Physik und Mathematik hilfreich für die Schüler sein kann. Dabei erwies sich die zweite Teilaufgabe als zutreffende Diagnoseaufgabe — oder sogar Testaufgabe — für das Vorliegen eines Abgleichs im Lösungsprozess der Schüler. Weiterhin zeigt sich, dass der Abgleich nicht nur implizit mit der erfolgreichen Bearbeitung der Aufgabe zusammenhängt, sondern explizit beim Beheben von Problemen Unterstützung leistet. Nur bei dem Problem der Determinierung der Physik durch die Mathematik wurde die hilfreiche Funktion des Abgleichs aufgehoben.

Als Fazit lässt sich daher feststellen, dass generell die Verbindung zwischen Physik und Mathematik durchaus eine unterstützende Funktion für die Schüler darstellen kann. Bei den an dieser Studie teilnehmenden Schülern war die physikalische Interpretation bei Unsicherheiten und mathematischen Fehlern bezüglich der Null eine Hilfe, so dass auf diesem Niveau die Verbindung als Unterstützung gesehen werden kann. Auf der anderen Seite bestehen teilweise erhebliche Probleme im Bereich der strukturellen Fähigkeiten, so dass hier die hilfreiche Funktion des Abgleichs fraglich ist. Wenn die Schüler die Eigenschaften einer Funktion nicht beachten oder verstehen, können sie diese auch nicht unterstützend nutzen.

Die Schlussfolgerung daraus sollte jedoch lauten, dass ein größerer Fokus auf die Verbindung von physikalischer Bedeutung und mathematischer Strukturen — also ein Lehren und Lernen der strukturellen Fähigkeiten — nicht nur die hier bestehenden Probleme beheben könnte, sondern auch eine Unterstützung für die Schüler beim Lösen physikalisch-mathematischer Problemstellungen darstellt. Wenn nämlich keine grundlegenden Verständnisprobleme bezüglich der Verbindung bestehen — wie im Fall des Abgleichs bei der Aufgabe „Zwei Massen“ —, dann kann die Verbindung hilfreich genutzt werden und bei der Behebung von Problemen helfen.

12.2. Implikationen zum Umgang mit der Mathematik im Physikunterricht

Es lassen sich sowohl aus der Theorie als auch aus den empirischen Ergebnissen vielfältige Implikationen für die Unterrichtspraxis ableiten. Dabei ist eine Konsequenz bereits durch die Anlage der empirischen Studie vorgegeben: Die Beachtung des Vorwissens der Schüler. Mit dem Ziel der Erforschung des Verständnisses und der Probleme von Schülern beim Verbinden von Physik und Mathematik war bereits die Implikation verbunden, die dabei gewonnenen Erkenntnisse im Sinne von Schülervorstellungen für ein konstruktivistisches Lernen zu nutzen. Auch für den Zweck einer didaktischen Rekonstruktion von mathematisierten Themenbereichen sollten die hier herausgearbeiteten Probleme und Vorstellungen der Schüler genutzt werden.

Sobald physikalische Formeln in den Unterricht treten, sollten die Lehrer sich der Verständnisprobleme der Schüler bewusst werden und nicht davon ausgehen, dass die physikalische Bedeutung der mathematischen Strukturen automatisch von den Schülern erfasst wird. Die unzureichende Lernwirkung typischer Rechenaufgaben wird an den Übersetzungsproblemen besonders deutlich. Was hat man erreicht, wenn die Schüler physikalische Formeln als Werkzeug zum Berechnen vorstrukturierter Situationen verwenden können, die physikalische Bedeutung und deren Zusammenhang zur Struktur der Formel jedoch nicht verstehen? An dieser Stelle ist ein Umdenken dahingehend erforderlich, dass zuerst die grundlegenden Zusammenhänge zwischen physikalischer Bedeutung und entsprechender mathematischer Repräsentation gelehrt und gelernt werden, bevor die Anwendung zur Berechnung erfolgt.

Wie bereits in Kapitel 5 zur Aufgabenkultur besprochen, ist die Änderung und Verbesserung der Aufgabenkultur im Physikunterricht erforderlich. Hinsichtlich der mathematisch-physikalischen Qualität der Aufgaben lässt sich im Licht der Übersetzungsprobleme fordern, dass eine Ausrichtung auf die inhaltlichen Zusammenhänge von mathematischen Strukturen und physikalischem Verhalten erfolgen muss. Wie es bereits in den vier vorgestellten konzeptuell-mathematischen Physikaufgaben der Fall ist, sollte die Übersetzung zwischen Physik und Mathematik in den Fokus der Aufgabenstellung gestellt werden. Dabei kann — auch ganz im Sinne einer qualitativen Physik — auf Zahlenwerte verzichtet und die Verbindung zur Mathematik ebenfalls qualitativ diskutiert werden.

Die Aufgabe „Luftwiderstand“ ist ein Beispiel für ein Aufgabenformat, das sich gut in

Verbindung mit selbständigem Experimentieren denken lässt. Die Schüler könnten die Zusammenhänge physikalischer Größen experimentell ergründen und daraus eine Formel aufstellen. Mit weiteren Unterstützungen, wie beispielsweise gestuften Hilfen, kann der Schwierigkeitsgrad an das Niveau der Schüler angepasst werden. Bei dieser Vorgehensweise wird die Mathematisierung des physikalischen Verhaltens thematisiert — eine sinnvolle Alternative zum gängigen Überprüfen der Messwerte mittels gegebener Formeln.

Auch aus der Aufgabe „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung" lassen sich Anregungen für den Unterricht generieren. Die darin enthaltene Diskussion der Bedeutung einer Formel und des unterschiedlichen Einflusses der Terme kann auch bei (allen) anderen physikalischen Formeln Anwendung finden, sobald sie im Unterricht eingeführt werden. Eine geeignete Herleitung zur Einführung einer Formel ist wohl nicht immer möglich, die Bedeutung sollte allerdings ausführlich besprochen und interpretiert werden, um einen Zusammenhang zum physikalischen Verhalten herzustellen.

Diese Forderung nach einer ausführlichen Diskussion der physikalischen Bedeutung von Formeln wird auch durch das physikalische Mathematisierungsmodell gestützt. Die unterschiedlichen Niveaus der Mathematisierung in einem physikalisch-mathematischen Modell und deren enge Verwobenheit sind ein Plädoyer für eine schrittweise Mathematisierung — so wie es in dem Beispiel zum freien Fall in Kapitel 4.3 dargelegt ist. Zu große „Schrittweiten" bei der Mathematisierung können den Schülern Schwierigkeiten bereiten, wie es auch in der erhöhten Schwierigkeit der letzten beiden Teilaufgaben der Aufgabe „Phantasie-Universum" deutlich wird.

Ziel muss daher sein, die Schüler durch eine abgestufte Mathematisierung in kleinen Schritten dabei zu unterstützen, die Verbindung zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischen Strukturen zu verstehen. Wenn somit die strukturellen Fähigkeiten der Schüler ausgebaut werden können, ist auch ein positiver Effekt auf das Lösen mathematisch-physikalischer Problemstellungen zu erwarten. Wie die Analyse zur Aufgabe „Zwei Massen" gezeigt hat, können die Schüler die Verbindung von Physik und Mathematik durchaus hilfreich nutzen, wenn das Schwierigkeitsniveau der Verbindung nicht zu hoch ist. Mit verbesserten strukturellen Fähigkeiten steigen auch die Möglichkeiten, diese Verbindung als Unterstützung zu verwenden. Zusätzlich kann es sinnvoll sein, die unterstützende Funktion des Abgleichs explizit zu thematisieren und möglichst häufig in den Unterricht einzubauen.

Abgesehen von den konzeptuell-mathematischen Physikaufgaben zeigt bereits die Abwandlung von Schulbuchaufgaben positive Effekte. Wie die Auswertung der Aufgabe „Straßenüberquerung" gezeigt hat, führt bereits der Verzicht auf gegebene Zahlenwerte und die natürliche Formulierung der Problemsituation zu einer Verbesserung der Lösungsstrategien. So fertigen die Schüler eine Skizze an, anhand derer sie die Situation analysieren. Es lassen sich also durchaus mit einfachen Mitteln Effekte erzielen, die die technischen Fähigkeiten aus dem Fokus der Aufmerksamkeit der Schüler nehmen. Auf der anderen Seite zeigt die Problematik des exakten Umgangs mit den geschätzten Werten, dass auch an dieser Stelle eine unzureichende Verbindung zwischen der mathematischen Repräsentation und der physikalischen Bedeutung vorhanden ist. Wenn im Physikunterricht mit Zahlen hantiert wird, sollte daher der sinnvollen Verankerung der Bedeutung der Zahlenwerte in dem Erfahrungsbereich der Schüler hohe Aufmerksamkeit zuteil werden.

Die bisher erörterten Konsequenzen für den Physikunterricht beziehen sich auf eine Änderung der Unterrichts- und Aufgabenkultur in Bezug zur Rolle der Mathematik. Darüber hinaus stellt sich jedoch die Frage, ob es ausreichend ist, wenn sich Lehrer der Übersetzungsprobleme bewusst sind und in ihrer Unterrichtsgestaltung berücksichtigen, oder ob es nicht zusätzlich nötig ist, die Probleme explizit zu adressieren. So könnten die identifizierten Schwierigkeiten und Vorstellungen im Unterricht thematisiert und diskutiert werden. Ebenso wie es Sherin (2001) für die symbolischen Formen fordert, können damit im Einklang auch die Übersetzungsprobleme direkt in den Fokus spezieller Lernsituationen gestellt werden. Dadurch könnte sowohl das Verstehen als auch das Bewusstsein der Schüler für den Zusammenhang zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischer Struktur geschärft werden.

Weiterhin können neue Aufgaben und Unterrichtseinheiten konzipiert werden, die die identifizierten Probleme direkt angehen. Zum Beispiel könnten die Problemfelder der „Nichtbeachtung der Eigenschaften einer Funktion" und der „Auffassung eines Produktes als Funktion" durch Parallelen zum Mathematikunterricht und dem dort verwendeten Gebrauch mathematischer Funktionen angegangen werden. Wenn den Schülern der Zusammenhang zwischen den „physikalischen" und „mathematischen" Funktionen explizit veranschaulicht wird, könnte der Transfer des mathematischen Wissens in den physikalischen Kontext erleichtert werden. Diese Forderung ist auch im Einklang mit den von Redish (2006) erläuterten Schwierigkeiten aufgrund der unterschiedlichen Benutzung mathematischer Strukturen im physikalischen und mathematischen Kontext.

Ein Problemfeld, das sich zur expliziten Thematisierung in Aufgaben besonders eignet, betrifft die Verwendung des neutralen Elements und insbesondere die Verwendung der Null zum Ausdruck von Ruhe. Vielleicht wird die Null versehentlich als ein numerischer Fall unter unendlich vielen angesehen, weshalb er keine besondere Beachtung im Unterricht findet. Tatsächlich ist die Null jedoch einer von zwei Fällen: entweder es findet Bewegung statt oder nicht. Aus dieser Perspektive sind Situationen, die mit einer Null mathematisiert werden, im Unterrichtsgeschehen deutlich unterrepräsentiert. Eine stärkere Beachtung solcher Situationen — auch in Rechenaufgaben, wenn diese gewünscht sind —, sollte helfen, die Unsicherheiten der Schüler im Umgang mit der Null zu beheben.

Das Problemfeld zum Konzept der Änderungsrate und zugehörigen mathematischen Strukturen unterstützt dagegen die schon von Hewitt (2006) geäußerte Erkenntnis, dass das Schwierige an der Beschleunigung ihre Natur als Rate einer Rate ist. Auch bei den hier identifizierten Problemen zeigte sich diese Schwierigkeit in den Problemen der Schüler, die Änderungsrate mit passenden mathematischen Strukturen zu verbinden. Wie bereits an anderer Stelle diskutiert, sollten Geschwindigkeit und Beschleunigung als physikalisch-mathematische Konzepte aufgefasst werden und dementsprechend auch im Physikunterricht angegangen werden. Ein rein physikalisches Verstehen dieser Konzepte anzustreben, kann daher nicht erfolgversprechend sein und enthält bereits einen Widerspruch zur intrinsisch vorhandenen mathematischen Natur.

Zum Abschluss sei noch einmal betont, dass insgesamt ein Umdenken hin zu konzeptuell-mathematischem Physikunterricht erfolgen sollte. Dieser ist jedoch nicht isoliert als eine spezielle Unterrichtseinheit zu verstehen, sondern als Grundhaltung gegenüber der Rolle der Mathematik und deren Einbindung in den Physikunterricht. Der Fokus auf strukturelle Fähigkeiten ist nicht als Fokus im Gegensatz zum Experimentieren oder anderen Tätigkeiten aufzufassen, sondern als Fokus im Gegensatz zum schematisch-technischen Gebrauch der Mathematik. Die Mathematik beeinflusst viele Bereiche des Physikunterrichts, und immer wenn sie auftritt, ist die Möglichkeit einer konzeptuell-mathematischen Physik gegeben.

12.3. Forschungsperspektiven

Die Forschung zur Rolle der Mathematik im Physikunterricht hält noch viele offene Fragen bereit. In dieser Arbeit wurde das mathematische Denken im Physikunterricht einer theoretischen und empirischen Analyse unterzogen. Dabei wurde ein didaktisches Modell zum physikalisch-mathematischen Arbeiten entwickelt und die Probleme und Vorstellungen der Schüler zur Übersetzung zwischen Physik und Mathematik untersucht. Als hauptsächlich offene Anliegen verbleiben in diesem Rahmen die weitere Anwendung des Modells, ergänzende diagnostische Untersuchungen zum Übersetzungsprozess sowie die Überprüfung der didaktischen Implikationen.

Das physikalische Mathematisierungsmodell und der revidierte Modellierungskreislauf wurden aus theoretischen Überlegungen entwickelt. In der Analyse und Konstruktion von Aufgaben sowie bei der Klassifizierung der Übersetzungsprobleme in verschiedene Problembereiche wurden die entwickelten Modelle bereits in dieser Arbeit erfolgreich angewendet. Die zum Modellierungskreislauf in der Mathematikdidaktik analoge Verwendung (vgl. auch Kap. 2.4 und Prediger (2010)) zur Diagnose von Modellierungsprozessen oder als explizit zu lehrendes Modell zum Verbessern der Mathematisierungskompetenz steht noch aus. Weitere Bewährungen der Modelle in der Problemdiagnose, bei der Konstruktion von Lernumgebungen und zum Beschreiben mathematisch-physikalischer Kompetenzen wären ebenfalls sinnvoll, insbesondere um die Anwendung über den Rahmen dieser Arbeit hinaus zu generalisieren.

Bezüglich diagnostischer Gesichtspunkte zur Übersetzung zwischen Physik und Mathematik stellt die vorliegende Untersuchung einen ersten explorativen Schritt dar. Trotz der zahlreichen und vielfältigen identifizierten Probleme ist die Analyse notwendigerweise durch die Auswahl der Schüler und der speziellen Aufgaben beschränkt. Andere Schüler werden bei anderen Aufgaben noch weitere Probleme zeigen, die in dieser Studie nicht erfasst wurden. Zum Beispiel konnten nur einige Probleme und Vorstellungen im Zusammenhang mit Verhältnissen und Brüchen diagnostiziert werden, zur Subtraktion liegen keine Erkenntnisse vor. In den eingesetzten Aufgaben sind Produkt und Summe die vorherrschenden mathematischen Strukturen, hier könnte eine Analyse bei Aufgaben mit anderem Schwerpunkt neue Erkenntnisse liefern.

Auch das Alter der Schüler und das Themengebiet der Mechanik — und hier hauptsächlich Kinematik — hat einen Einfluss auf die identifizierten Probleme. Bei Schülern der siebten und achten Klasse sind ebenso andere Ergebnisse zu erwarten wie in der Oberstufe oder im Leistungskurs. Interessant wäre zu untersuchen, ob und wie sich die Übersetzungsprobleme und Vorstellungen der Schüler entwickeln, festigen oder auflösen. Auch der Einfluss der physikalischen Thematik müsste näher analysiert werden. Es ist denkbar, dass in anderen physikalischen Kontexten bestimmte problematische Vorstellungen der Schüler nicht relevant sind oder eventuell gar nicht bestehen. Für letztere Vermutung gibt es zwar keinen Hinweis in dieser Studie, ein klarer Ausschluss kann jedoch erst durch weitere Untersuchungen geliefert werden.

Ein weiterer, in dieser Arbeit ausgesparter Aspekt ist die Übersetzung zur grafischen Repräsentation. Sowohl das physikalische Verhalten als auch die mathematisch-algebraischen Strukturen können in Diagramme übersetzt werden. Hierbei sind ebenfalls problematische Vorstellungen der Schüler zu erwarten, die eine weitere wichtige Ergänzung zu den in dieser Studie präsentierten Ergebnissen darstellen würden. Wie gehen die Schüler beispielsweise mit der problematischen Auffassung eines Produktes als Funktion im Zusammenhang mit einer graphischen Darstellung um? Hilft ihnen die zusätzliche Repräsentationsform beim Beheben des Problems oder treten neue Vorstellungen in Erscheinung?

Aus den in dieser Arbeit präsentierten Erkenntnissen wurden im vorigen Abschnitt Implikationen für den Physikunterricht abgeleitet. Dabei ist zu beachten, dass viele der Implikationen den Status begründeter Hypothesen haben. So zeigen die Probleme der Schüler beim Verbinden von Physik und Mathematik den Bedarf an, die strukturellen Fähigkeiten stärker zu beachten und zu fördern. Wie genau dies geschehen sollte und ob beispielsweise ein explizites Adressieren der Übersetzungsprobleme tatsächlich zu einem besseren Verständnis der Schüler führt, müsste durch spezielle empirische Untersuchungen abgeklärt werden.

Dabei ergeben sich vielfältige Forschungsperspektiven. Es könnten einzelne Implikationen wie das explizite Diskutieren der Probleme oder das ausführliche Besprechen der Bedeutung einer Formel auf ihre Lernwirksamkeit untersucht werden. Auch ein größerer Fokus auf Situationen, die durch eine Null mathematisiert werden, oder der Effekt von Aufgaben, die die inhaltliche Übersetzung zwischen Physik und Mathematik thematisieren, wären interessante Interventionen, deren Auswirkungen in speziellen Studien analysiert werden können.

Eine weitere Idee wäre, ein Unterrichtskonzept zur konzeptuell-mathematischen Physik zu entwickeln, das die identifizierten Probleme und Vorstellungen berücksichtigt und eine veränderte Aufgabenkultur in der besprochenen Art und Weise enthält. Wie sich solch ein Unterricht auf die Schüler auswirkt, könnte im Hinblick auf mehrere Effekte in verschiedenen Studien analysiert werden. Zum einen sollten die fachlichen Leistungen nicht unter einem konzeptuell-mathematischen Physikunterricht leiden, insbesondere der Einfluss auf das qualitativ-physikalische Verständnis müsste näher untersucht werden. Auch die Auswirkungen auf Problemlösestrategien, Modellierungskompetenzen und Transferwissen könnten interessante Hinweise zur Verbesserung des Physikunterrichts liefern. Und nicht zuletzt wäre danach zu fragen, ob ein konzeptuell-mathematischer Physikunterricht einen positiven Effekt auf die Vorstellungen der Schüler zur Natur der Physik hat.

Die Möglichkeiten weiterer wissenschaftlicher Untersuchungen zu Bedingungen und Auswirkungen eines konzeptuell-mathematischen Physikunterrichts sind vielfältig und es bedarf einiger Anstrengung, genügend verlässliche Erkenntnisse zu gewinnen. Das Ziel sollte sein, die Rolle der Mathematik im Physikunterricht nachhaltig zu ändern, so dass die Schüler den Zusammenhang zwischen physikalischer Bedeutung und mathematischen Strukturen verstehen und zur gegenseitigen Unterstützung nutzen können.

Nachwort

Nun ist die Dissertation geschrieben und ich blicke zurück auf die letzten Monate des Schreibens und die letzten Jahre Doktorarbeit. Vor gut drei Jahren, Ende 2008, kam ich von der Diplomarbeit in theoretischer Quantenphysik, war allerdings schon längere Zeit gedanklich mit pädagogischen und didaktischen Fragen befasst. Die lernpsychologische und didaktische Perspektive auf das mathematisch-physikalische Denken hat mich eigentlich während des gesamten Studiums begleitet, oftmals leider ausgelöst durch unverständliche Lehrbücher und Vorlesungen. Mit einer Doktorarbeit zum Thema „Mathematik im Physikunterricht“ konnte ich mich genau dieser Problematik widmen. Und vielleicht regt diese Arbeit auch andere an, sich mit dem Thema zu beschäftigen und trägt somit in der ein oder anderen Weise dazu bei, den Physikunterricht ein kleines Stückchen zu verbessern.

Auch wenn die vorliegende Arbeit aus meiner „Feder“ stammt, so wäre ich ohne Hilfe und Unterstützung mehrerer Menschen wohl nie zu einem befriedigenden Ende gekommen. Mein besonderer Dank gilt dabei Frau Prof. Pospiech für die tolle Betreuung dieser Arbeit. Sie war immer ansprechbar und hat sich viel Zeit für gemeinsame Diskussionen genommen. Dabei habe ich viele wertvolle Anregungen erhalten, hatte aber immer den nötigen Freiraum, eigenen Ideen nachzugehen und die Doktorarbeit somit als persönliches Projekt zu begreifen. Die Balance, eine Struktur zu geben ohne dabei einengend zu wirken, ist ihr wunderbar gelungen. Vielen Dank.

Ein weiterer wichtiger Eckpfeiler für die Ergebnisse meiner Arbeit, insbesondere im theoretischen Teil, war die Zusammenarbeit mit Ricardo Karam. Auch hier geht ein indirekter Dank an Frau Pospiech, dafür, dass sie es Ricardo ermöglicht hat, für ein Jahr in unserer Arbeitsgruppe zu arbeiten. Diese Zusammenarbeit war ein echter Glücksfall, sowohl für die produktive Arbeit als auch für den Gewinn einer engen Freundschaft. Die Diskussionen mit Ricardo haben mich immer motiviert und waren sehr anregend, die Konferenzen haben doppelt Spaß gemacht.

Allerdings habe ich das Wohlbefinden bei der Arbeit ebenso allen anderen Kollegen zu verdanken. Sylvia Schmitt als gute Seele unserer Gruppe, die für die familiäre Atmosphäre gesorgt hat und mir zudem viel Verwaltungsarbeit abgenommen hat. Für unsere nette Frühstücks- und Mittagsrunde, die anregenden Seminare und das stets offene Ohr für Anliegen aller Art möchte ich mich herzlich bedanken bei: Göran Tronicke, David Obst, Matthias Schöne, Jessie Best, Manuela Lipinsky, Kornelia Renner, Thomas Prestel,

Gesine Seidel, Sandra Lein, Meike Willeke, Kerstin Gedigk und Ulrike Böhm. Besonders bedanken möchte ich mich noch bei David, der ein super Zimmerkollege und Konferenzpartner war, der viel mit mir diskutiert hat und mir sehr bei meiner Datenauswertung geholfen hat. Da hätte mir ebenfalls nichts Besseres passieren können.

Ein weiterer Dank geht — stellvertretend für die Menschen, die in diesem Rahmen zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen haben — an die Organisationen der Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik (GDCP) und der European Science Education Research Association (ESERA) für die Ausrichtung hervorragender Doktorandentagungen bzw. „Summerschools". Ich hatte das Glück, an zwei dieser Tagungen teilnehmen zu können und dabei viele interessante Hinweise bekommen zu haben, die entscheidend auf die Struktur meiner Arbeit eingewirkt haben. Ebenso möchte ich mich noch besonders bei Olaf Krey für eine anregend kritische Diskussion bei meiner ersten GDCP-Tagung bedanken, die mir sehr bei der Ideenfindung geholfen hat. Und außerdem geht ein herzlicher Dank an Prof. Dietmar Höttecke für interessante Gespräche in Hamburg und die Erstellung des zweiten Gutachtens.

Insgesamt waren die letzten gut drei Jahre eine schöne Zeit. Ich habe viel gelernt, aber dabei den Spaß nicht vergessen. Auch hat die Arbeit die meiste Zeit nicht allzu sehr in mein Privatleben eingewirkt (glaube ich zumindest). Wenn doch mal stressigere Phasen dabei waren, insbesondere natürlich in den letzten Wochen vor Abgabe der Arbeit, habe ich von meiner Familie immer Unterstützung erfahren. Das ging bis zu fachlichen Anregungen und dem Korrekturlesen der Dissertation. Danke. Danke Lena — für alles.

Olaf Uhden

Dresden im März 2012

Anhang

A. Materialien zum Ablauf der Studie

Auf den folgenden Seiten sind alle Materialien in der Reihenfolge des Ablaufs der Studie angegeben. Die ersten beiden Seiten zeigen den Einleitungstext, die Datenabfrage, den Fragebogen zum Selbstkonzept und die Frage nach der Rolle der Formeln. Die folgenden beiden Seiten zeigen die schriftlichen Mathematikaufgaben. Anschließend sind die sechs Aufgaben enthalten, die an der interaktiven Tafel bearbeitet werden mussten, zum Abschluss kommt die schriftliche Physikaufgabe.

Mathematik und Physik

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

zuerst nochmal vielen Dank, dass du bei dieser Studie mitmachst. Der Ablauf sieht wie folgt aus: Auf diesen Seiten möchten wir einige Informationen von dir und dich bitten, einen kurzen Fragebogen mit sieben Fragen zu beantworten. Außerdem bekommst du zwei Aufgaben, die du bitte alleine schriftlich beantwortest. Danach wirst du einige Aufgaben erhalten, die du mit Partner(in)gemeinsam bearbeiten sollst. Dabei möchten wir dich bitten zu versuchen, möglichst viel zu diskutieren und deine Gedanken zu äußern. Von deiner Redebereitschaft hängt es wesentlich ab, ob die Beobachtung brauchbare Ergebnisse liefert. Um im Nachhinein eine Auswertung zu ermöglichen möchten wir, mit deiner Zustimmung, eine Tonaufnahme mitlaufen lassen.

Um die Daten zu anonymisieren aber trotzdem eine Zuordnung der verschiedenen Daten zueinander zu ermöglichen, benötigst du einen individuellen Code. Den Code bilde bitte folgendermaßen:

Du nimmst jeweils den ersten Buchstaben des Vornamens und des Geburtsnamens deiner Mutter, den Tag deines Geburtsdatums und den ersten Buchstaben des Vornamens deines Vaters.

Beispiel: Deine Mutter heißt: Anne Müller geb. Schulze, du bist geboren am 04. März und dein Vater heißt Hans. Dann ist dein Code: AS-04-H

Schreibe deinen Code bitte auf jede Seite des Fragebogens.

Vielen Dank für deine Mitarbeit und viel Spaß.

##

CODE: ________________ jeweils erster Buchstabe des Vornamens und des Geburtsnamens der Mutter, der Tag deines Geburtsdatums und der erste Buchstabe des Vornamens des Vaters.

Name deiner Schule:___________________________________

Klassenstufe: _____ Alter: ______ Geschlecht: männlich / weiblich

Bitte trage in die unten stehende Tabelle deine letzten Zeugnisnoten ein.

	Halbjahr 2010	*Gesamtnote 2009*	*Halbjahr 2009*
Physik			
Mathe			
Deutsch			

CODE: _______________

Beantworte bitte die folgenden Fragen durch Ankreuzen:

	sehr gut	gut	mittel	schlecht	sehr schlecht
Ich verstehe den Stoff in Physik	❑	❑	❑	❑	❑
Ich behalte den Stoff in Physik	❑	❑	❑	❑	❑
Meine Leistungen in Physik schätze ich als ... ein....	❑	❑	❑	❑	❑
Ich beteilige mich am Physikunterricht	❑	❑	❑	❑	❑
Ich glaube, dass mich meine Klassenkameraden in Physik für .... halten...	❑	❑	❑	❑	❑
Ich glaube, dass mein Physiklehrer meine Leistungen als .... einschätzt......................................	❑	❑	❑	❑	❑
Ich erwarte, dass meine Leistungen in Zukunft .... sein werden...	❑	❑	❑	❑	❑

Was ist deiner Meinung nach die Aufgabe von Formeln in der Physik?

____

____

____

CODE: ______________________

1. Betrachte die Funktion $f(x) = ax^2$.

   a) Wie sieht $f(x)$ aus, wenn x um b zunimmt?

   b) Wie sieht $f(x)$ aus, wenn x um den Faktor c vergrößert wird?

   c) Gegeben ist noch eine weitere Funktion $g(x) = dx^2$. Unter welcher Bedingung für d ist $f(2)$ größer als $g(4)$?

CODE: ____________________

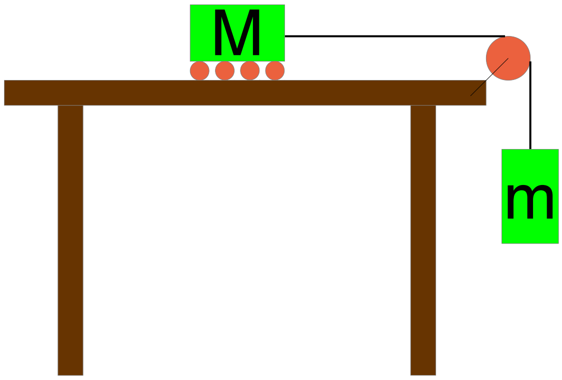
2. Schreibe eine Gleichung für die folgende Aussage auf: „An deiner Schule gibt es sechsmal so viele Schüler wie Lehrer.“ Benutze S für die Anzahl der Schüler und L für die Anzahl der Lehrer.

Straßenüberquerung

Ihr wollt eine zweispurige Landstraße (eine Fahrspur in jede Richtung) in normalem Schritttempo überqueren. Wie weit müssen die fahrenden Autos, die von links kommen, und wie weit müssen die fahrenden Autos, die von rechts kommen, mindestens von euch entfernt sein, um ein gefahrloses Überqueren der Straße zu ermöglichen?

Zwei Massen

Zwei Körper der Massen M bzw. m sind wie auf der Abbildung miteinander verbunden: Der Körper der Masse M ist auf Rädern gelagert und mit einem Seil über eine Umlen-



krolle mit dem Körper der Masse m verbunden, welcher frei in der Luft hängt. Die Räder und die Umlenkrolle sind so gut gelagert, dass die Reibung vernachlässigt werden kann. So lange der Körper M festgehalten wird, bewegen sich die Körper nicht. Wenn aber M losgelassen wird, beschleunigen beide Körper mit der Beschleunigung $a = \frac{m}{M+m} \cdot g$, wobei g die Fallbeschleunigung ist.

a) Betrachtet anhand der Formel, wie groß die Beschleunigung beider Körper ist, wenn die Masse M des rollenden Körpers vernachlässigbar klein ist.

b) Betrachtet anhand der Formel, wie groß die Beschleunigung beider Körper ist, wenn die Masse m des hängenden Körpers vernachlässigbar klein ist.

Sind eure Ergebnisse physikalisch sinnvoll?

Phantasie-Universum

Stellt euch vor, ihr gelangt in ein Phantasie-Universum, in dem andere physikalische Gesetze gelten als bei uns. So wird in dieser Phantasie-Welt der freie Fall nicht durch die Gleichung $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ wie bei uns beschrieben, sondern durch $\mathcal{S} = \frac{1}{2 \cdot \mathcal{G}} \cdot \mathcal{T}^2$ (Die etwas anderen Symbole sollen nur daran erinnern, dass sie sich auf die entsprechenden physikalischen Größen in der Phantasie-Welt beziehen und daher auch unbekannte Einheiten haben. Ihre Bedeutung ist aber analog zu den bekannten Symbolen aus unserer Welt)! Welche der folgenden Aussagen über den freien Fall (die in unserer wirklichen Welt alle korrekt sind!) wären daher in dieser Phantasie-Welt nicht korrekt?

a) Der gefallene Weg hängt von der Fallzeit und dem Ortsfaktor ab.

b) Wenn man länger fällt, legt man mehr Weg zurück.

c) Wäre der Ortsfaktor größer, würde man mehr Weg in der gleichen Zeit zurücklegen.

d) Die Fallgeschwindigkeit nimmt zu, je länger man fällt.

e) Wäre der Ortsfaktor kleiner, würde man langsamer fallen.

Begründet bitte eure Antwort!

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Die Formel für den zurückgelegten Weg bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung lautet: $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$.

a) Erklärt, welche physikalische Bedeutung die einzelnen Summanden ($\frac{1}{2}at^2$ bzw. v_0t bzw. s_0) haben.

b) Entscheidet, welcher der Summanden zu welchen Zeiten den größten Einfluss auf die zurückgelegte Strecke hat.

Luftwiderstand

Lässt man auf der Erde einen Körper fallen, muss man noch den Einfluss des Luftwiderstandes berücksichtigen. Dieser hat eine bremsende Wirkung, was man durch eine (negative) Beschleunigung a_{Luft} beschreibt. Ihr sollt die Gleichung für a_{Luft} aufstellen, wobei ihr auf folgendes Wissen zurückgreifen könnt: a_{Luft} ist proportional oder indirekt proportional zu...

- ρ („Rho"): Dichte der Luft
- A: Querschnittsfläche des Körpers in Bewegungsrichtung
- m: Masse des Körpers
- v^2: Quadrat der Geschwindigkeit des Körpers

Wie muss demnach die Gleichung für a_{Luft} aussehen?

ICE

Ein ICE fährt mit konstanter Beschleunigung an und hat nach drei Minuten eine Strecke von 6,5 Kilometern zurückgelegt.

a) Welche Geschwindigkeit hat er nach diesen drei Minuten? Gebt sie auch in $\frac{km}{h}$ an.

b) Versucht euren Lösungsweg in a) zu verallgemeinern, indem ihr eine Gleichung aufstellt, mit der ihr die Geschwindigkeit des ICE in Abhängigkeit der gegebenen Werte (Strecke und Zeit) berechnen könnt. Überprüft eure Gleichung.

CODE: ____________________

Die Gleichung für den reibungslosen freien Fall lautet $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$.

a) Wieviel mal größer ist die gefallene Strecke, wenn man k-mal länger fällt?

b) Wie lässt sich die gefallene Strecke berechnen, wenn man n Sekunden länger fällt?

c) Auf anderen Planeten ist die Fallzeit eine andere als auf der Erde. Wie müsste dort die Formel zur Beschreibung des freien Falles aussehen?

d) Auf der Erde fällt man innerhalb von 2 Sekunden eine Strecke von ungefähr 20 Metern. Erörtere - wenn möglich anhand deines Ergebnisses aus a) - unter welcher Bedingung man auf einem anderen Planeten innerhalb von 4 Sekunden eine kürzere Strecke fällt.

B. Datensatz

In diesem Kapitel sind zum einen die abgefragten Daten der Schüler (durch Codes anonymisiert) angegeben. Darin werden unter anderem die Gruppenzuordnung, die Schulnoten sowie die Ergebnisse des Tests zum Selbstkonzept ersichtlich. Anschließend folgt eine Zuordnung der Problembeispiele aus Kapitel 9 zu den zugehörigen Schülergruppen, Aufgaben und Transkriptzeilen. Damit können einerseits die Zitate den entsprechenden Schülerdaten zugeordnet werden, andererseits ist eine Überprüfung der Kategorisierung möglich. Allerdings wurden aus Platzgründen nur die vollständigen Transkripte der vier Fallstudien angefügt, bei Interesse an weiteren Transkripten kann mit dem Autor Kontakt aufgenommen werden.

Um die Schüler der Fallstudien den Kontrollparametern zuordnen zu können, sind hier die zugehörigen Codes:

- Nina: AK26L
- Katrin:TN26T
- Anne: KS16K
- Julia: IW22R
- Marie: SF05H
- Sara: SG16W
- Jana: HS18G
- Nadine: SK14W

B.1. Kontrollparameter

Nr.	Code	Farbe	Gruppe	Alter	Klasse	Geschlecht	Schule	Physik hj 10	Physik g 09	Physik hj 09	Mathe hj 10	Mathe g 09	Mathe hj 09	Deutsch hj 10	Deutsch g 09	Deutsch hj 09	Selbstkonzept
1	PN21O	Weiß	1	15	9	w	A	2	2	2	1	1	1	1-	2	2	2
2	IM28J	Schwarz	1	15	9	w	A	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2
3	TB16T	Weiß	2	16	10	m	A	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2
4	TD07T	Schwarz	2	17	10	m	A	2	2	3	3	3	3	3	3	3	2,57
5	CI28F	Weiß	3	15	10	w	B	2	2	2	2	2	3	2	3	3	1,71
6	KO03P	Schwarz	3	16	10	w	B	2	2	2	1	2	2	2	2	2	/
7	DG10T	Weiß	4	15	9	w	A	3	3	3	2	3	3	2	3	3	3
8	LW16M	Schwarz	4	15	9	w	A	3	3	3	3-	4	3-	2	2	3+	2,29
9	KG17J	Weiß	5	15	9	m	C	3	3		4	3		4	3		2,57
10	DC22C	Schwarz	5	15	9	w	A	2	3		3	2	2	2-	3		1,71
11	OK03A	Weiß	6	15	9	w	D	2	3	3	3	3	3	2	2	2	1,86
12	AK17K	Schwarz	6	15	9	w	D	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2,29
13	HS18G	Weiß	7	16	9	m	D	2	2	3	3	2	2	2	3	3	2,14
14	SK14W	Schwarz	7	16	9	m	D	2	2	2	1	2	2	2	2	2	1,86
15	SS21B	Weiß	8	15	9	m	D	3	2	2	3	2	2	2	2	2	2,29
16	UP28H	Schwarz	8	14	9	m	D	3	2	2	3	2	2	4	4	3	2,57
17	KS16K	Weiß	9	16	10	w	D	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
18	IW22R	Schwarz	9	16	10	w	D	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1,57
19	AK26L	Weiß	10	15	10	m	D	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2,57
20	TN26T	Schwarz	10	16	10	w	D	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2,14
21	SB17F	Weiß	11	17	10	m	D	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2,43
22	CJ03R	Schwarz	11	16	10	m	D	3	2	2	3	2	2	3	2	3	2
23	SF05H	Weiß	12	14	9	m	A	2	2	2	2	1	2+	2	3	3	1,57
24	SG16W	Schwarz	12	14	9	m	A	2	2 – 1	2 – 1	2	2	2	2	2	2	1,71
25	HT25H	Weiß	13	15	9	m	A	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1,86
26	BD02M	Schwarz	13	15	9	w	A	3	3	2	3	3	3	2	2	2	2,43
27	MB18H	Weiß	14	16	10	m	A	2	2	4	3	3	3	3	2	2	2
28	JS30V	Schwarz	14	16	10	m	A	2	2	2	3	3	2	3	3	3	1,71
29	SG02A	Weiß	15	15	9	w	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,43
30	IS11F	Schwarz	15	14	9	w	C	2	2	2	2	2	2	1	2	2	1,57

B.2. Zuordnung der Problembeispiele zu den Transkripten

Im Folgenden sind alle Beispielzitate der Problemanalyse (Kapitel 9) den entsprechenden Stellen in den Transkripten zugeordnet. In der Reihenfolge des Auftretens in Kapitel 9 sind für jedes der Beispiele die Nummer der Schülergruppe, die betreffende Aufgabe sowie die Zeile im Transkript angegeben. Um auch ohne die Transkripte eine Zuordnung der Schüler — S1 oder S2 — zu den Kontrollparametern zu ermöglichen, ist jeweils die Schriftfarbe von S1 — w (weiß) oder s (schwarz) — angegeben.

B.2.1. Probleme beim Benutzen struktureller Fähigkeiten

1. Problematische Vorstellungen zu einem Verhältnis zweier physikalischer Größen
   a) Gruppe 6, „Luftwiderstand“, Zeile 305 ff., (S1=w)
   b) Gruppe 4, „Phantasie-Universum“, Zeile 174, (S1=s)
2. Problematische Vorstellungen zur Bedeutung eines Produktes zweier physikalischer Größen
   a) Gruppe 5, „Luftwiderstand“, Zeile 68, (S1=s)
   b) Gruppe 7, „Luftwiderstand“, Zeile 54 ff., (S1=s)
3. Problematische Vorstellungen zum Ausdruck von Wichtigkeit in mathematischen Strukturen
   a) Gruppe 6, „Phantasie-Universum“, Zeile 396, (S1=w)
   b) Gruppe 5, „Luftwiderstand“, Zeile 45, (S1=w)
   c) Gruppe 5, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 63, (S1=s)
4. Probleme beim Mathematisieren von Proportionalität
   a) Gruppe 7, „Luftwiderstand“, Zeile 51 ff., (S1=w)
   b) Gruppe 11, „Luftwiderstand“, Zeile 29, (S1=w)
      Gruppe 3, „Luftwiderstand“, Zeile 136 ff.
5. Probleme mit der Verwendung des neutralen Elements 0 oder 1
   a) Gruppe 7, „Zwei Massen“, Zeile 18, (S1=s)
      Gruppe 11, „Zwei Massen“, Zeile 39 f., (S1=s)

Gruppe 8, „Zwei Massen“, Zeile 68 ff., (S1=w)

b) Gruppe 10, „Zwei Massen“, Zeile 22, (S1=w)

c) Gruppe 5, „Zwei Massen“, Zeile 11, (S1=s)

Gruppe5, „Zwei Massen“, Zeile 39 f., (S1=s)

6. Probleme mit dem Konzept der Änderungsrate und zugehörigen mathematischen Strukturen

   a) Gruppe 9, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 54 ff., (S1=s)

   b) Gruppe 9, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 46 ff., (S1=s)

7. Nichtbeachtung der Eigenschaften einer Funktion

   a) Gruppe 3, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 75 ff., (S1=w)

   b) Gruppe 7, „Luftwiderstand“, Zeile 22 ff., (S1=s)

   c) Gruppe 11, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 46, (S1=s)

   d) Gruppe 9, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 46 ff., (S1=s)

8. Auffassung eines Produktes als Funktion

   a) Gruppe 14, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 31, (S1=s)

      Gruppe 3, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 104, (S1=s)

   b) Gruppe 14, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 59 ff., (S1=w)

   c) Gruppe 8, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 29, (S1=s)

      Gruppe 5, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 19 ff., (S1=s)

   d) Gruppe 10, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 29, (S1=s)

   e) Gruppe 10, „Zwei Massen“, Zeile 14 ff., (S1=w)

      Gruppe 3, „Phantasie-Universum“, Zeile 24, (S1=s)

      Gruppe 14, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 23, (S1=s)

B.2.2. Schematisch-technischer Umgang und oberflächliche Übersetzung

1. Ersatz für Mathematisierung: Erinnern

Gruppe 15, „Zwei Massen“, Zeile 121 ff., (S1=s)

2. Ersatz für Interpretation: Assoziation

   Gruppe 10, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 4, (S1=w)

   Gruppe 2, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 22 ff., (S1=w)

3. Schematisch-technisches Vorgehen und Routine

   Gruppe 5, „Zwei Massen“, Zeile 11 ff., (S1=s)

   Gruppe 13, „Phantasie-Universum“, Zeile 88 ff.

B.2.3. Interferenz mit dem Erfahrungsbereich der Schüler

1. Erfahrungen mit Spezialfällen von Formeln

   Gruppe 11, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 14, (S1=w)

   Gruppe 14, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 47 ff., (S1=w)

   Gruppe 13, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 29 ff., (S1=w)

   Gruppe 12, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 11, (S1=s)

2. Exakter Charakter physikalisch-mathematischer Modelle

   Gruppe 14, „Zwei Massen“, Zeile 87, (S1=w)

   Gruppe 10, „Zwei Massen“, Zeile 103, (S1=w)

   Gruppe 7, „Zwei Massen“, Zeile 31, (S1=s)

3. Konkreter Bezug physikalischer Größen

   Gruppe 1, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 54 ff., (S1=s)

   Gruppe 6, „Luftwiderstand“, Zeile 329, (S1=s)

B.2.4. Ergänzende Probleme

1. Mathematik determiniert Physik

   Gruppe 5, „Zwei Massen“, Zeile 201 ff., (S1=s)

   Gruppe 10, „Zwei Massen“, Zeile 8 ff., (S1=w)

2. Physik determiniert Mathematik

   Gruppe 3, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 104, (S1=s)

   Gruppe 5, „Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“, Zeile 90 ff., (S1=s)

   Gruppe 9, „Luftwiderstand“, Zeile 46, (S1=s)

3. Physikalische Korrektheit

   Gruppe 6, „Luftwiderstand“, Zeile 77, (S1=s)

4. Mathematische Korrektheit

   Gruppe 6, „Luftwiderstand“, Zeile 47, (S1=s)

   Gruppe 15, „Phantasie-Universum“, Zeile 152, (S1=s)

B.3. Transkripte der Fallstudien

B.3.1. Zwei Massen

Zeit	Nina (weiß)	Katrin (schwarz)	Anmerkungen
	Ähm.		
		Na bei der ersten ist ja dann so ein g	
	Ja genau. Weil m durch m ist Eins.		
00:33		Ja.	
	Und auch so. Sollst ja auch, ob es physikalisch sinnvoll ist, weil es ist ja dann, weil das egal ist alles fällt das ja einfach nur mal runter und das ist freier Fall ist g.		
		Na eben.	
	Und bei b ist das... hab ich ein m.-tel. Weil m und m kürzt sich weg.		
		Ja. Ein groß M aber.	
00:49	Ein groß M oh ja. Und physikalisch sinnvoll, weil das bremst ja den freien Fall.		
		Nu.	
	Nu. Dann schreiben wir das hin.ich will aber mit grün schreiben, äh mit weiß schreiben.		
	Also a. a ist gleich g. Soll ich den Wert hinschreiben?		Nina schreibt: a) a=g
		9,81	
	82, oder?		
		81!	
	Steht ja gar nichts interessantes drin oder?		Bezieht sich auf: Windowsfenster öffnet sich, Schüler gehen auf Abbrechen.
01:34		Ja, dann lass ich`s einfach	ebenso
	Ähm...		
		Machen wir... willst du jetzt b machen?	
	Na nee, begründen wir gleich öhm...weil m durch m gleich Eins und groß M egal ist. So ähm...		Nina schreibt: weil m/m=1 und M egal ist.
02:02		Na das... willst du das noch hinschreiben, ob das sinnvoll ist jetzt gleich?	
	Schreiben wir hin ja.		
		Na dann ist es nicht sinnvoll.	
	Äh nein. Ob es physikalisch sinnvoll ist. Es macht ja Sinn. Weil ein freier Fall einfach ist.		
		Ja.	
	Es ist sinnvoll, weil in ...Experiment der freier Fall		Nina schreibt: Es ist sinnvoll

	betrachtet wird?		weil in dem Experiment der Freie Fall...
		Ja!	
	...betrachtet		Nina schreibt: ...betrachtet wird.
		...wird	
03:07	wird. Schön		
		b?	
	Ähm...b.		Nina schreibt: b)
		Na a ist gleich...	
	A ist gleich Eins durch m		Nina schreibt: a=1/m
		Groß M! Klein m wird ja...	
	Ach nein? Ähm gibt`s einen Radiergummi? Ich mach gleich weiter. A ist gleich Eins durch groß M... mal..		Nina streicht a=1/m durch und schreibt stattdessen: a=1/M
		G!	
	...g...		Nina schreibt: *g
03:48	Ähm...weil		Nina schreibt: weil
		Klein m egal ist.	
	Ja und weil auch m durch m wieder Eins ist.		
		Nein Null.	
	Ach nee ja stimmt darfst du ja gar nicht durch teilen...		
		Ja.	
	...weil das ja unten ein Plus ist. Ähm weil...		
		Naja das ist aber...	
04:13	Nee da oben das ist ja, das ist egal.		
		Jaja aber guck mal, wenn wir das, wenn groß... nee wenn klein m... ja doch...	
	Das ist diesmal andersrum, weil das nur ein ganz kleiner Wert ist.		
		Jaja.	
	Aber da wär das ja Null...		
		Du darfst aber doch nicht...weg kürzen oder?	
	Nee nee, weg kürzen darf ich nicht, aber wir sollen hier erstmal... hier soll m vernachlässigt werden, das heißt a ist gut und b... vernachlässigbar klein ist, ist ja		

	nicht dass das Eins ist...		
		Vernachlässigbar... es ist so klein, dass es vernachlässigt werden kann.	
	Na schön, da hast du oben halt knapp einen Wert über Null stehen.		
		Ja.	
	Null durch m ist nicht ein m-tel.		
		Ja ich weiß, hab ich auch grad gesagt.	
04:57	Ja dann geh mal aus dem Bild, da müssen wir das auch weg machen. Dann hast du ähm Null durch m.		Nina streicht Formel a=1/M*g und "weil" durch
		Vielleicht fällt mir noch was ein.	
	Nee nee das ist ja Null Ist Null aber...		
05:19		Na Null mal g ist Null.	
	Ja aber ist ja kurz über Null also müsste ein ziemlich kleiner Wert raus kommen aber...		
		Ist doch vernachlässigbar, so klein ist das, wird also gar nicht mit einbezogen. Es ist so klein, dass es vernachlässigbar... also dass es gar nicht mehr in die Rechnung mit einbezogen wird.	
05:44	Das kannst du aufschreiben.		
		Da würde aber trotzdem Null durch m raus kommen.	
	Ja genau, muss ja also erstmal. Müssen jetzt erstmal Null durch m hinschreiben und dann schreiben ja nee aber...		
		... das geht ja dann trotzdem nicht....	
	Schreibst du also a...		Katrin schreibt (in weiß): a=
		Ist Null oder was?	
	Nee ist gleich... Du schreibst erstmal die Formel hin... und schreibst dann dahinter, dass m so klein ist, dass man das Ganze, dass der ganze Bruch sehr klein wird.		
06:16		Hier steht doch auch... vernachlässigbar klein ist, da haben wir das m doch auch gleich weggelassen	

	Ja aber ich... du willst jetzt den ganzen Bruch gleich weglassen?		
		Ähm...	
	Weil m sollen wir ja erstmal nicht weglassen, also schreiben wir m erstmal mit in die Gleichung rein...		
06:34		Ja dann mach das... Ja dann mach mach mach... aaah	
	Schreib!		
		Soll ich jetzt die normale Formel aufschreiben?	
	Nu. Und dann schreibst du dahinter, dass du das ja eigentlich weglassen kannst.		Katrin schreibt: m/(M+m)*g
	M ist sehr klein		Katrin schreibt: m ist sehr klein
07:04		... und kann deshalb weggelassen werden.	
	Ähm, steht irgendwo dass das große M auch groß ist?		
		Das große M sollen wir doch gar nicht groß betrachten	
	Ja aber schau mal, wenn das große M auch ganz ganz ganz ganz klein ist, dann ist das sowas wie wenn du jetzt äh Null Komma Eins durch Null Komma Eins hättest, dann hättest du wieder Eins.		
07:27		Ja, hätte man. Hätte hätte hätte...	
	Kannst du ja aber auch vernachlässigen.		
		Wärs dann eh...	
	Also es hängt davon ab, wie groß jetzt das m ist. Wenn das jetzt ein großer Wert ist, dann wird dieses...		
		Dann ist Null durch groß m, aber...	
	Ja dann wird 0,1 durch Hundert meinetwegen... da hast du ein ganz...		
		Du vernachlässigst doch hier kleine m so wie wir hier oben das große M vernachlässigen.	
	Es ist vernachlässigbar klein. Es ist sehr sehr klein, aber es ist... es geht durch die Gleichung nicht, dass es vernachlässigt wird.		
08:02	Es hängt davon ab, wie jetzt m ist, wenn jetzt das große M groß ist, dann wirds ein ganz kleiner Bruch		

		Hmm.	
	Dann wird das g auch ganz klein.		
		Und wenn das große M groß ist, dann wird\`s großer Bruch.	
	Wenn das große m klein ist.		
		Ja nee, doch das mein ich ja. Ja genau.	
	Gehts gegen Eins und das g wird halt groß. M ist sehr klein, deshalb hängt das ganze von dem großen M ab, wenn groß M...		Katrin schreibt: --> a hängt von M ab --> wenn M groß ist ---> Bruch klein
		Groß!	
	...groß, dann Bruch klein, Deutsch fünf, Bruch klein		
09:02		Meine Schrift ist voll schlimm.	
	Wenn groß m klein, Bruch geht gegen Eins. Eins das heißt neun, nee g wird kaum verändert.		Katrin schreibt: --> wenn M klein --> Bruch geht gegen Eins --> g wird kaum verändert
09:44	Physikalisch sinnvoll? Öööh. Warte jetzt muss ich mal kurz überlegen. Wenn m jetzt kaum ne Größe hat		
		Dann wär...	
	Ja das macht physikalisch auch Sinn, weil wenn m jetzt ganz klein ist und groß M ganz..		
		Groß...	
	... und schwer, dann bewegt sich das m kaum.		
10:04		Ja.	
	Die Beschleunigung ist ganz klein und wenn groß M auch ganz klein ist, bewegt sichs trotzdem, mit einer annähernd normalen Fallbeschleunigung..		
		Ja.	
	Also... es ist sinnvoll ähm reicht das wenn wir das mündlich machen? Also es ist sinnvoll. Punkt.		Katrin schreibt: Es ist sinnvoll
		Es ist sinnvoll.	
	Punkt!		

B.3.2. Phantasie-Universum

Zeit	Anne (weiß)	Julia (schwarz)	Anmerkungen
	Ja, also es geht darum, dass das nicht korrekt ist ist ja extra beschrieben, oder unterstrichen.		
00:15		Hmm. So...	
	Ja...		
		Also wir haben ja hier s ist der Weg, ne?	
	Hmm.		
		G ist diese Fallbeschleunigung, die bei uns 9,81 ist, t ist die Zeit die man dafür benötigt...	
	Genau.		
		... für diesen Weg. Genau.	
00:41	Und die etwas anderen Symbole sollen nur daran erinnern, dass die sich...		
		Ja, die Symbole haben die gleiche Bedeutung. So und bei a, der gefallene Weg hängt von der Fallzeit und dem Ortsfaktor ab... Also ich würde sagen das stimmt immer noch, oder? Weil wenn du hier drüben die Größen veränderst, ändert sichs ja gleichzeitig hier, ne? Ist ja eine Gleichung.	
01:11	Ja. Aber dann ist das ja... dann stimmt das immer noch. Ja genau.		
		So, a die Aussage stimmt.	
	Ja.		
		Sollen wir das aufschreiben?	
	Mach ein Häkchen dahinter!		
		Ein Häkchen.	Julia macht Häkchen hinter a)
	Wenn`s nicht stimmt machen wir ein Kreuz oder so.		
		Hmm. So und wenn man länger fällt, legt man mehr Weg zurück.	
02:09	Ähm, wenn man länger fällt, das heißt, wenn t...		
		...ist größer...	
	s größer wird ähm, nein...		
		Nein Quatsch, wenn t...	
	...wenn t größer wird, wird...		
		...also ist auch s größer.	
	Ja. Aber wir haben ja nur ein einfaches s und ein t Quadrat.		
		Ja, aber es steht ja nur da, dass	

		man mehr Weg zurücklegt und nicht wie viel mehr...	
	Wenn man... fällt legt man mehr... Aber warte mal hier steht ja: Die in unserer wirklichen Welt alle korrekt sind. Und da haben wir ja auch ein normales s und ein normales t Quadrat.		
		Na, es heißt ja: Welche Aussagen werden in der Phantasiewelt nicht mehr stimmen. Aber ich meine das Eigentliche was sich in der Gleichung ja verändert hat, ist das...	
	... Einhalb mal g...		
		...Einhalb mal g genau. Das heißt das hat nichts mit dem...	
	S und dem t Quadrat zu tun		
03:28		Na eigentlich schon. aber das ist ja nun die Hälfte von Allem, das ist ja nur...	
	Ich weiß jetzt gerade nicht was du meinst.		
		Nee es ist... meine, wie soll ich das erklären?	
	Schreibs doch an!		
		Nee, das kann man nicht anschreiben. Wenn... gucke mal hier hast du ja die Hälfte vom g mal dieses t Quadrat, ne?	
	Hmm.		
		Bloß hier hast du ja Eins durch zweimal g. das heißt das wäre dann ein ganz anderer Einfluss. aber das wird ja in dem Sinne in dieser Aufgabenstellung gerade nicht beachtet, ne? Wenn man länger fällt, legt man mehr Weg zurück, das ist ja erstmal nur s und t Quadrat wichtig.	
04:07	Eben!		
		Das heißt, das hier können wir mal außer acht lassen mit dem Eins durch zweimal g.	
	Ich würde sagen, dass das stimmt.		
		Es stimmt immer noch, ne?	
	Weil hier ist das ja ähnlich. Also würde ich sagen das wird auch stimmen.		
		Na gut.	Julia macht Häkchen an b)

		So...so...	
	Ich würde sagen, dass c ähm nicht korrekt ist, weil mit dem g weil das halt so im Nenner steht und hier ist das ja frei		
		Weil...na. Wollen wir das mal mit irgendwelchen ausgedachten Werten durchrechnen? Weil komm mal mit. Wenn du... Komm mal her.	
	Roll ihn doch her.		
		Wenn du zum Beispiel... jetzt nehmen wir mal für t, nehmen wir man für t ist Eins okej?	
05:29	Nee, t ist Eins ist doof.		
		Na dann zwei okej?	
	Ja.		
		Das heißt du hast ein halb mal 9,81 mal...	
	Hast du gerade Komma 1 oder 81 gehabt?		
		Also du hast ein halb mal 9,81 mal...	
	Und dann zwei mal zwei ähh		
		Zwei ins Quadrat ist Vier. Ich weiß du hast das. Und wenn man jetzt das Gleiche rechnet mit...	
	Nein, das stimmt ja!		
		Nu!	
	Die Aussage für das stimmt ja.		
		Jaja genau. Und wenn du jetzt einen größeren Ortsfaktor hast, das heißt du hättest dann... Eins durch...	
	Na, ich weiß jetzt nicht gerade was du rechnest.		
06:23		Naja...	
	Rechnest du jetzt mit der Formel oder mit der?		
		Na jetzt mit der. Wenn du jetzt hier zum Beispiel irgendwie...	
	Mach mal Zehn Komma.		
		Oder machen wir mal Zehn, ne? Das heißt da haben wir eins durch zweimal Zehn das sind.	
	Ein Zwansigstel.		
		Ein Zwanzigstel. Das Ergebnis ist dann ein... ein Zwanzigstel. Okej 0,05 mal...	
	...mal Vier...		

		Vier. Das heißt du hast nur 0,2. Das heißt, wenn der Ortsfaktor größer ist...	
	Wird der weg kleiner.		
		Genau, also es stimmt diese Aussage nicht mehr.	
07:10	Genau.		
		Genau.	Julia malt Kreuz hinter c)
		So... die Fallgeschwindigkeit nimmt zu je länger man fällt. Ist es nicht so, dass die Fallgeschwindigkeit konstant ist?	
	Ja, aber hier steht ja: ... über den freien Fall, die in unserer wirklichen Welt alle korrekt sind...		
08:19		Wollen wir erstmal das Nächste machen?	
	Ja!		
		So und jetzt die Frage: Wäre der Ortsfaktor kleiner würde man langsamer fallen.	
	Also die Geschwindigkeit.		
		Komisch. Das ist ja eigentlich relativ logisch. Wenn man nicht ganz so stark angezogen wird, dass man dann nicht ganz so schnell runter fällt, oder? Ist jetzt halt die Frage, ob das in dieser Phantasiewelt auch zutrifft.	
09:10	Naa..., müssen wir mal durchrechnen.		
		Na, aber wir haben ja keine Geschwindigkeit in unserer Formel. Das wäre ja irgendwas mit v bloß wir haben ja nur s, g und t.	
	Na, du kannst das doch trotzdem ausrechnen.		
		Naja, was willst du denn ausrechnen?	
	Mit der Geschwindigkeit... wir haben die Gleichung. S ist der Weg, t ist die Zeit		
		Ja.	
	Und wenn du dann den Ortsfaktor hast, hast du den Weg und die Zeit. Und dann kannst du das umstellen und in die Formel v ist gleich s durch t einsetzen.		
		Mach mal!	

	Halt mal!		
		Hmm.	
	Ähm, was nehmen wir jetzt für einen Ortsfaktor?		
		Hmm, wäre der Ortsfaktor kleiner, das heißt irgendwas... nehmen wir mal fünf. damit kannst du gut rechnen.	
	Okej, also wir haben jetzt.		
		Ein Zehntel	
	So... mal Vier.		
		Ja.	
	Und Null Komma		
		0,4 in dem Beispiel.	
	Als Weg.		
		Hm hm.	
	Und es ist warte mal...		
		Und v ist gleich s durch t, das heißt wir haben 0,4 durch Zwei. Das wäre 0,2.	
11:04	Warte mal warte mal. Jetzt bin ich durcheinander.		
		Na das ist jetzt die Geschwindigkeit und jetzt rechnen wir das mit dem ganz normalen Ortsfaktor nochmal durch.	
	Das wären dann...		
		Wart mal.	
	Merk dir mal 0,2 hm? Eins durch..		
		Ähm warte mal.	
	Eins mal Vier.		
		Was rechnest denn du? Irgendwas Komisches? Das soll doch oder warte mal. Du hast durch 9,81 mal Zwei.	
	Hmm		
		Das ist Eins durch Quatsch und wenn du 0,2 hast, ne? Und das mal Vier	
	Mal Vier.		
		Ist s.	
	Hmm und wir hatten vorhin einen Weg von 0,4 und eine Geschwindigkeit von 0,2.		
		Zwei. Und was haben wir jetzt? Was wie rum und was muss 0,2? Das heißt wir haben jetzt v gleich s geteilt durch Zwei. 0,1. Das heißt die Geschwindigkeit...	

	...wird größer...		
12:24		Also stimmt das nicht, weil es würde schneller fallen. Wart mal in dem ersten... in der Phantasiewelt. In dem ersten Beispiel haben wir gerade mit dem kleineren Ortsfaktor gerechnet und da haben wir etwas von 0,2 in dem Beispiel rausgekriegt.	
	Hmm.		
		Und bei dem mit dem normalen Ortsfaktor 9,81... haben wir was von 0,1 mitgekriegt von einer Geschwindigkeit. Das heißt der Ortsfaktor ist kleiner geworden, aber die Geschwindigkeit größer und damit trifft das da nicht zu.	
	Sieht man gar nicht. *lacht*		
		Soll ich?	Julia malt Kreuz hinter e)
13:13	So, jetzt müssen wir nur noch die d machen.		
		Das heißt wir müssen das eigentlich genau so nochmal durchrechnen nur dass man jetzt die Zeit und nicht den Weg sucht.	
	Die Fallgeschwindigkeit nimmt zu...		
		Nee, Quatsch die Geschwindigkeit, was mein ich denn? Die ähm...	
	Die Fallgeschwindigkeit nimmt zu, je länger man fällt. Das heißt man...		
		Das heißt desto größer s desto größer v.	
	Die Fallgeschwindigkeit nimmt...		
		Nee, t... Je größer t, desto größer auch v. Also t ist ja die Zeit. je größer die Zeit, desto größer...	
	Nee, warte mal warte mal! Die Fallgeschwindigkeit nimmt zu, je länger man fällt. Also...		
14:03		Also müsste man jetzt t verändern.... Warte mal ich glaub wir haben einen Fehler gemacht. Wir haben das zweimal mit der gleichen...bloß wir müssen das ja mit der vergleichen. Verstehst du?	
	Nee?		

		Na wir haben doch jetzt grade den normalen und...	
	Na wir haben doch den...		
14:38		Nee, nee du hast Recht!	
	Wir haben doch mit 9,81 gerechnet.		
		Nee, das haben... Also nochmal zu b.	
	Nee, wir haben jetzt gerade gerechnet, wir haben ähm... den...		
		Nee nee das stimmt schon.	
	Nein! Lass mich mal! Wir haben gerade gerechnet,. Wir haben den Ortsfaktor verändert und haben damit einen anderen Weg rausbekommen.		
		Ja.	
	Und haben dann mit der Gleichung v ist gleich s durch t das ausgerechnet.		
		Naja...	
	Durch den Weg.		
15:19		Naja müssen wir das nicht irgendwie mit der vergleichen, weil es heißt ja im Gegensatz zu unserer normalen Welt? Nee, ne? Stimmt so, oder?	
	Ich würde es so lassen.		
		Okej.	
	Und jetzt...		
		...zu d.	
	Muss man...?		
		Jetzt müssen wir das eigentlich nochmal machen nur dass wir jetzt t verändern und nicht den Ortsfaktor. Ne? Wir verändern jetzt in der Gleichung t und setzen das dann in dieses v ist gleich s durch t ein. Und sind jetzt aber auf die Geschwindigkeit... oder?	
16:06	Ich bin nämlich gerade durcheinander.		
		Na... wir nehmen jetzt irgendeinen beliebigen Ortsfaktor. Nehmen wir den normalen oder einen anderen? Mal ganz kurz. Und wenn wir mal... nehmen wir jetzt den normalen Ortsfaktor?	
	Ja.		
		Also haben wir Eins durch das	

		war ja 19,62, ne? Mal und jetzt haben wir am Anfang gehabt Vier, das war ja das hier. Dieser Wert mit 0,2.	
	Hmm.		
		Und wenn wir jetzt...	
	Dann hatten wir eine Geschwindigkeit von...		
		...warte, v ist gleich s durch t	
	...durch Zwei, sind dann 0,1 oder so , ne?		
		Genau, 0,1. Und wenn wir jetzt t verändern... das heißt wir haben Eins durch 19,62 mal...	
	Drei? Nee...		
		Ähm, wenn du Drei ins Quadrat machst, dann sind das Neun, ne? Mal Neun, ne?	
17:36	Hmm.		
		Und das ist dann, da haben wir dann diesen Wert den wir raus kriegen durch Drei, ne?	
	Ja.		
		Das heißt wir haben 0,15. Das heißt das ...	
	... ist größer.		
		Und das trifft zu. Wir haben t erhöht und damit nahm auch v zu. Und damit stimmt d.	
17:59	Ja! Ich kann ja mal da das Sigma nehmen.		Julia malt Kreuz hinter d)
		Nee, Quatsch. Das stimmt so, ne?	Julia streicht Kreuz durch
	Ja. Das stimmt so.		
		Also haben wir ein Häkchen. So rum.	Julia malt Häkchen hinter d).
	Also wir haben jetzt hier aufgemalt, was Häkchen ist stimmt auch in der Phantasiewelt und was Kreuz ist, das stimmt nicht.		

B.3.3. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Zeit	Marie (weiß)	Sara (schwarz)	Anmerkungen
	Hast du das verstanden?		
		Ja, ich glaube gleich.	
	Finde ich gut.		
		Hoffe ich zumindest.	
	Also ich habe a). Du musst b) haben.		
00:08		Das war vorhin. Die Skepsis kam zurück…Also was haben wir denn? ... Fangen wir mit ½ a t^2 an.	
	Das ist die umgestellte Formel für die Beschleunigung, die nämlich lautet: a=2s/(t^2).		
		Ja und das heißt?	
	Soweit habe ich das da. Ja, die physikalische Bedeutung, dass ist halt…das was… sozusagen während der Bewegung passiert.		
		Gut… also ich habe hingeschrieben, dass es im Prinzip die Strecke ist, wo der Körper beschleunigt wird.	
00:58	Genau.		
		Schreibst du das auf? Du hast es doch so schön wissenschaftlich formuliert.	
	a) also… ½ a t^2…und das ist. was hast du gesagt? Das ist die…		Marie schreibt a) ½ a t^2…
		Strecke, wo der Körper beschleunigt wird.	Marie schreibt Strecke, auf der der Körper beschleunigt wird.
01:51		Also, v_0 t?	
	Also v_0 t ist die Startgeschwindigkeit.		Marie schreibt v_0t…
		Warum ist das eigentlich die Startgeschwindigkeit? Das ist doch keine Geschwindigkeit allein. Das ist eine Zeit mal einer Geschwindigkeit und wenn die Geschwindigkeit nicht null ist, ist es wieder eine Strecke.	
	Naja auf jeden Fall ist das, obwohl nein…		
		Doch.	
	S_0 ist nämlich…		
		ja na und…	
	S_0 ist nämlich der bereits		Marie schreibt

	zurückgelegte Weg. Ich habe die Formel mal gelernt. Zumindest ein bisschen. Da ist die Geschwindigkeit und der bereits zurückgelegte Weg mit drin.		s_0…
02:33		Aber die Geschwindigkeit ist zurzeit doch null.	
	Nö. Mit der Formel kannst du das auch aus der vollen Bewegung berechnen.		
		Ach so.	
	Das ist nämlich die Startgeschwindigkeit.		Marie schreibt weiter (v_0…) Startgeschwindig keit
		Mal der Startzeit… also der Zeit nach dem Start	
	Ist das vielleicht die Beschleunigung?		
		Was?	
03:07	Das Ding hier?		
		Könnte auch so sein… So nennt man das vielleicht.	
	Nennen wir das Ding hier Startbeschleunigung.		Marie ersetzt Startgeschwindig keit durch Startbeschleunig ung
		Man nimmt die Geschwindigkeit mal eine Zeit…	
	Und das ist der bereits zurückgelegte Weg		Marie schreibt (S_0…) bereits zurückgelegter Weg
		Ich überleg gerade. Wie ist denn das? ... Aber die Geschwindigkeit mal einer Zeit ist doch auch ein Weg, oder? ... Ist v_0 mal t nicht der Weg?	
03:55	Na, was soll s denn sein?		
		Ja, dann ist das auch ein Weg… s ist v*t… also muss das doch auch eine Strecke sein.	
	Das ist aber sinnlos, die gleiche Strecke zweimal zu nehmen.		
		Ja, aber es eine Strecke.	
	Da hätte man doch gleich s_0 mal 2…		
		ja, es sind Physiker.	
	Ne, gerade weil es Physiker sind,		

	hätten sie s_0 mal 2 geschrieben.		
		Na und. Aber es ist keine Beschleunigung.	
	Wir können uns jetzt eine halbe Stunde lang daran aufhängen.		
		Ja… also ich bin nicht der Meinung, dass es eine Beschleunigung ist.	
04:45	Ich auch nicht… klingt aber besser… Irgendwas war es auf jeden Fall. Irgendwas mit Bewegung. Man muss es ja…		
		Ist ja auch eine Bewegung, v_0.	
	Ja, naja das ist halt…		
		Im Prinzip ist das doch die Strecke, die schon vorher zurückgelegt wurde.	
	Das ist doch sinnlos. Das steht doch unten drunter.		
		S_0 ist die Strecke, die es nicht gibt.	
	Komm wir pokern einfach mal.		
		Ich setz ein Fragezeichen dahinter.	
05:19	Ne das wirkt unsicher. Wir sind uns doch voll sicher.		Marie schreibt b)
		Na und. Der weiß doch schon, dass wir uns voll unsicher sind… Entscheidet, welcher der Summanden zu welchen Zeiten den größten Einfluss hat.	Sara schreibt Fragezeichen hinter Antwort von Aufgabe 1
	Hast du das verstanden?		
05:59		Ich hab da wieder so…also… wir müssen uns jetzt aussuchen welches von den dreien da,… entweder am Anfang, am Ende oder in der Mitte ungefähr den größten Einfluss hat.	
	Keine Ahnung, aber am Anfang bestimmt die beiden Dinger hier…in der Mitte das.		
		Im Prinzip ist es doch so. In dem Augenblick wo wir starten ist es v_0*t, würde ich sagen.	
	Naja die beiden halt. Na klar, na gut…		
		dann wenn wir beschleunigen ist es irgendwie ½*a*t.	
	Und das?		
		Weiß ich auch nicht.	
06:35	Wollen wir das ans Ende setzen?		

		Das ist das davor.	
	Wie?		
		Bevor wir gestartet sind.	
	Vor dem Anfang?		
		Ja.	
	Also…Wie beschreiben wir das?		
		Ich habe keine Ahnung, ob das so richtig ist… Hast du noch eine sinnvolle Lösung?	
	Komm wir schreiben also… vor dem (unverständliches Wort). Na eigentlich sind die beide am Anfang wichtig.		
		Ja irgendwie schon.	
07:13	Man könnte auch sagen, das ist am Startpunkt wichtig, das ist direkt nach dem Startpunkt und das ist danach wichtig.		
		Keine Ahnung.	
	Oder so.		
		Schreib mal…Können die uns nicht auch mal eine viel lustigere Formel in Physik bringen?	Marie schreibt s_0…direkt beim Start v_0t...
	Die steht doch im Tafelwerk.		
		Besprechen tun wir doch sowas nicht in der Schule, oder?	
	Ehrlich gesagt, wenn wir das getan hätten, hätten mir ein paar Leute Leid getan in der Klasse.		
		Wär doch interessant geworden	
07:57	Äh… das ist jetzt direkt nach dem Start.		Marie schreibt… direkt nach dem Start
		Und 1/2 *a*t^2 das die ganze Zeit beschleunigt wird.	
	Und ½…		Marie schreibt ½ at^2…
		Jetzt muss du bei ½*a*t^2 noch was hinschreiben.	
08:41	Schreiben wir einfach danach?		
		Während der Beschleunigung.	Marie schreibt während der Beschleunigung.
	Gut.		

B.3.4. Luftwiderstand

Zeit	Jana (weiß)	Nadine (schwarz)	Anmerkungen
	Haste ne Idee?		
		Na zuerst, in welcher Einheit muss a_luft rauskommen.	
	Hmm?		
		In welcher Einheit muss a_luft rauskommen, also die Rückbeschleunigung.	
	Na wenn das ne Beschleunigung ist, wahrscheinlich mit...		
	(unver)	(unver) hoch zwei	
		Okay, wie kriegen wir es hin? Dass wir die Einheit bekommen? Müssen wir gucken, bei der Dichte haben wir g durch...was war denn das?	
00:42		(lacht) Okay...Volumen durch Masse...das hilft uns nicht... (unver) Dichte der Luft, das ist dann Null Komma nochwas	
	Es hilft die Geschwindigkeit		
		Geschwindigkeit	
	V hoch zwei		
		Rechnen wir das durch die Geschwindigkeit das Ganze, oder mal die Geschwindigkeit?	
	Das müssen wir noch überlegen....Masse?		
		Geschwindigkeit ist...	
	Masse ist auch wichtig, weil die für die Geschwindigkeit unter anderem		
01:19		Aha	
	Obwohl...		
		Ich bin nicht der Freund von Formeln aufstellen	
	Nee, ähm, wir sollen die Gleichung da aufstellen...also s war...proportional oder indirekt proportional zunehmen...zueinander stehen		
		Aha.	
		Also die Dichte steht proportional dazu...das müsste so sein.	
	Also die Dichte nimmt zu.		
		Dann wird der Körper langsamer	
	...wenn die Beschleunigung... Wieso nimmt die Dichte zu, wenn die Beschleunigung		

	zunimmt?		
		Die nimmt ja nicht zu. Wenn man zum Beispiel annimmt, dass Luft eine andere Dichte bekommt....(unver) von einem Stoff wandelt (unver) ist...mehr Sauerstoff oder ähnliches hat ja demzufolge ja auch eine andere Dichte. Wenn sie steigt wird der Körper aber dann langsamer.	
02:13	Die Querschnittsfläche		
		(unver) aber indirekt proportional. Querschnittsfläche, je größer die Fläche, desto langsamer wird auch der Körper	
	Also ist das erste indirekt proportional, das zweite direkt		
		Wieso?	
	Oder wie?		
		Na, das erste ist glaub ich indirekt, denn wenn die Dichte in Luft steigen würde, würde man auch langsamer fallen. Aber der Luftwiderstand wird dann größer sein. Weil dann Querschnittsfläche des Körpers, äh, wenn der größer wird, fällt man infolge auch langsamer.	
02.:47	Ah, weil mehr Widerstandsfläche ist.		
		Genau.	
	Also indirekt.		
		Auch indirekt	
	Masse des Körpers...		
		Masse des Körpers...je größer die Masse desto schneller fliegts. Oder ist das ein Trugschluss?... Ähmm, Masse des Körpers, das hat doch nichts mit dem freien Fall zu tun, das bringt ja alles doppelt durcheinander. Oder die Masse hat ne Auswirkung auf den Widerstand...das dürfte direkt proportional sein.	
	Und die Geschwindigkeit des Körpers?		
		V Quadrat, die Geschwindigkeit des Körpers	
	...nimmt ab, wenn der, wenn die		

	Gegengeschw...also auch indirekt		
		Ja. Luftwider...wenn Luft...	
	Das eine nimmt zu, das andere nimmt ab.		
		Ja. Okay. Und wie muss demzufolge die Gleichung aussehen?	
	(gähnt: Die Gleichung?)		
03:51		Ja, die Gleichung.	
	Heißt...fangen wir erstmal an...mit a_luft gleich		
		(lacht) das hätte ich auch schon geschafft.	
	Soll ich oder willst du?		
		Ja, schreib du.	
	Also...Luft...gleich (lacht) gleich		Jana schreibt a_luft=
		Gleich, ok, na wenns, hilfts uns die direkte Proportionalität oder ähnliches bei einer Gleichung?	
	Weiß nicht...Masse durch...nee...Masse des Körpers...		
		Ich glaub das könnte mit dem zusammenhängen und das mit dem.	
	Und wie machen wir das mit dem zusammen? Meinst p m mal		
		Wieso? Ich hätte da...p m kannst ja...	
	Äh, rho m		
		...kannst ja gar nicht zusammen machen. Denn das ist ja Masse des Körpers und das andere ist Dichte der Luft, das hat ja mit Luft zu tun...und ich bin im Masse des Körpers	
05:11		Oder wie meinst du das?...Quadrat...	
	Na um auch die Einheiten wegzukürzen, die du nicht brauchst.		
		Okay. Ja. Haste aber das Volumen.	
	Na, ist g durch m....durch...nee, kannst nicht wegkürzen...Masse durch Volumen...Ja doch, wenn du das (unver) Masse hoch zwei durch Volumen	(unver)	
		Wenn du...rho nimmst	
05:45	Und wie sonst?		

		Masse (unver: hoch?) zwei...kannst	
	Wenn du sagst, das ist ne andere Dichte an dem...durch den Körper		
		Na, das ist nur so, angenommen.	
	Ja, wenn wir das annehmen. Da gehört ja das dann...mit...		
		Querschnittsfläche des Körpers in Bewegungsrichtung...können wir nicht alles multiplizieren? (lacht) das klappt aber nicht mit Rückbeschleunigung (unver)	
	Die Masse hat ja auf jeden Fall was auch mit der Geschwindigkeit zu tun.		
		Die ham ja demzufolge auch alle mit der...einander was zu tun. Sind ja alle in einer Formel...	
06:34	Ja.		
		...oder sollen in einer sein. Quadrat der Geschwindigkeit...rho mal A mal m durch v hoch zwei	
	Querschnittsfläche ist ja auch Volumen, also...		
		Nein, ist ja ne Fläche.	
	Du musst ja das als einzigstes behalten, weil ja auch die Gegengeschwindigkeit...Masse kürzt sich mit Dichte weg		
		Wie?	
	Na, du musst ja...sagen wir mal 1000 Gramm und hier	(unver)	
		Du muss ja rho durch dann	
	Na ja, dann machen wir (unver) also das oben		
		Ok.	
07:28	Das zum Beispiel mal Querschnittsfläche...in...		
		Querschnittsfläche das wär dann ja	
	Du hast		
		Zentimeter Quadrat zum Beispiel	
	Das Volumen kürzt sich ja glaube ich demzufolge auch		
		Dichte der Luft...wird dann nur einfaches Längenmaß...denn hoch drei durch hoch zwei sind	

		normal	
	Na, wenn man (unver) fürs Kürzen nimmt, könnte man die Dichte mal die Geschwindigkeit durch Querschnittsfläche mal Masse. Kürzt du die beiden mit dem weg und hast dann die Geschwindigkeit	(unver)	
		Schreib mal an	
	Sozusagen, dann warte..Masse...		
08:23	Also dann sozusagen so m mal...dieses rho und dann durch das A mal v hoch zwei. Dann kürzt sich hier die Fläche weg und hier die Masse weg....Und du hast dann, v ist zum Beispiel Meter pro Sekunde...Meter pro Sekunde, das Ganze hoch zwei		Jana schreibt m*p/A*v². Zeigt am Ende bei 'Fläche' auf A
		Meter pro Sekunde	
	Oder pi durch m mal A mal v		
		Na, wenn du A mal v rechnen würdest, hast du ja hier zum Beispiel Meter hoch zwei mal wieder Meter hoch zwei...weil v ist (unver) man die Klammern nimmt...Hast ja Meter mal Meter, das ist ein...falsch...da kommt dann ja dreifaches Meter raus.	
09:24	Na dann ziehen wir das runter und das hoch		
		Masse muss...Masse, was war denn das?...Masse durch p, nee rho (unver)	
	Die Dichte war Volumen durch Masse...stimmts? Nee...g durch...ja	(unver)	
		Also Masse durch Volumen...Masse durch Volumen	
	Na ja, können wir das da wegkürzen...da haben wir hier, das ist ja hier		
		Das sind ja die Masse...dieses Masse und das ist dann Dichte	
	Na dann müssen wir das noch runterholen		Jana zeigt auf m
		Ja	
10:03	Da können wir die beiden wegkürzen und dann ham wir...die Zahlen		

	(unver)	(unver)	
	...die tauschen. Die tauschen.		
		Ja.	
	Also sozusagen...		
		Nee, schreib mal gleich daneben.	
	A mal ...durch m mal v hoch zwei	(unver)	Jana schreibt A*p/m*v²
	Mal kurz überlegen...Also hier...kürzt sich weg, kürzt sich weg und dann hast du bloß noch...die Geschwindigkeit		
	Masse durch Volumen, Masse kürzt sich weg, Volumen bleibt		
10:53	Okay		
	Geschwindigkeit durch...sag mir nochmal die Einheiten, ich verwechsele das immer		
		Okay.	
	Das ist g durch (unver) Zentimeter hoch		Zeigt auf p
		Also Masse durch Volumen	
	Ja.		
		Masse durch Volumen	
	Masse durch Volumen, dann kürzt sich das so weg		
		(unver) Volumen bleibt (unver) hier. Ähm...ich glaube, ähm...durch v hoch zwei, oder...	
			Jana schreibt A*m/p*v²
11:53		Wenn ich hier, kürzt sich ja das nicht weg	
	Stimmt, hast recht.		
		Haste ja Volumen und...	
	Also die Formel		
		Mal kurz überlegen (lacht) A Fläche durch das...Fläche durch, Masse durch Volumen	
	Ja.		
		Ich glaub schon.	
			Jana unterstreicht letzte Formel doppelt.
12:23	Ich hab keine Idee mehr, ich blick nicht mehr durch.		

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

Angell, C., Kind, P. M., Henriksen, E. K., und Guttersrud, O. (2008). An empirical-mathematical modeling approach to upper secondary physics. *Physics Education*, 43(3):256–264.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View.* Holt, Rinehart and Winston, New York.

Bagno, E., Berger, H., und Eylon, B.-S. (2008). Meeting the challenge of students' understanding of formulae in high-school physics: A learning tool. *Physics Education*, 43(1):75–82.

Basson, I. (2002). Physics and mathematics as interrelated fields of thought development using acceleration as an example. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33(5):679–690.

Berger, R. (2000). *Moderne bildgebende Verfahren der medizinischen Diagnostik — Ein Weg zu interessantem Physikunterricht*. Logos Verlag, Berlin.

Bing, T. J. und Redish, E. F. (2009). Analyzing problem solving using math in physics: Epistemological framing via warrants. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 5(2).

BLK (1997). *Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“*. Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung. Materialien zur Bildungsplanung und Forschungsförderung Heft 60, Bonn.

Blum, W. und Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1):45–58.

Blum, W. und Leiß, D. (2005). "Filling up"– the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In: Bosch, M. (Hrsg.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics*

Education, S. 1623–1633, Sant Feliu de Guíxols.

Bochner, S. (1981). *The Role of Mathematics in the Rise of Science*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Boniolo, G. und Budinich, P. (2005). The role of mathematics in physical sciences and Dirac's methodological revolution. In: Boniolo, G., Budinich, P., und Trobok, M. (Hrsg.), *The Role of Mathematics in Physical Sciences*, S. 75–96. Springer, Dordrecht.

Boniolo, G., Budinich, P., und Trobok, M. (Hrsg.) (2005). *The Role of Mathematics in Physical Sciences*. Springer, Dordrecht.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2):86–95.

Bortz, J., Lienert, G. A., und Boehnke, K. (2008). *Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik*. Springer, Heidelberg.

Boyer, C. B. (1949). *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Dover Publications, New York.

Brown, J. S., Collins, A., und Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18(1):32–42.

Bunge, M. (1973). *Philosophy of Physics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

Crowe, M. J. (1967). *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. University of Notre Dame Press, Notre Dame, Indiana.

Darrigol, O. (2000). *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. Oxford University Press Inc., New York.

Davis, P. J. und Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Birkhäuser, Boston.

Duden-Paetec (2006). *Lehrbuch Level Physik 9 Sachsen Gymansium*. DUDEN PAETEC GmbH, Berlin.

Duit, R. (2004). *Schülervorstellungen und Lernen von Physik*. IPN, Kiel. Piko-Brief Nr. 1.

Duit, R. (2009). Students' and teachers' conceptions and science education. Bibliography - STCSE. http://www.ipn.uni-kiel.de/aktuell/stcse/stcse.html.

Duit, R. und Wodzinski, C. T. (2006). *Merkmale „guten" Physikunterrichts*. IPN, Kiel.

Piko-Brief Nr. 10.

Einstein, A. (1934). *Mein Weltbild*. Querido Verlag, Amsterdam.

Feynman, R. P. (1985). *The Character of Physical Law*. The MIT Press, Cambridge Mass.

Feynman, R. P. (2007). *Vorlesungen über Physik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag.

Fischer, H. E. und Draxler, D. (2001). Aufgaben und naturwissenschaftlicher Unterricht. *MNU*, 54(7):388–393.

Gilbert, J. K. (2004). Models and modelling: Routes to a more authentic science education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2:115–130.

Gilbert, J. K. und Boulter, C. J. (2000). *Developing Models in Science Education*. Kluwer Academic Publishers.

Gingras, Y. (2001). What did mathematics do to physics? *History of Science*, 39:383–416.

Greca, I. M. und Moreira, M. A. (2001). Mental, physical, and mathematical models in the teaching and learning of physics. *Science Education*, 86(1):106–121.

Haines, C. und Crouch, R. (2010). Remarks on a modelling cycle and interpretation of behaviours. In: Lesh, R., Galbraith, P. L., Haines, C. R., und Hurford, A. (Hrsg.), *Modelling Students Mathematical Modelling Competencies (ICTMA 13)*. Springer, New York.

Hammer, D. (1994). Epistemological beliefs in introductory physics. *Cognition and Instruction*, 12(2):151–183.

Hertz, H. (1895). *Gesammelte Werke. Band I: Schriften vermischten Inhalts.* Barth, Leipzig.

Hesse, M. B. (1953). Models in physics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 4(15):198–214.

Hesse, M. B. (1966). *Models and Analogies in Science*. University of Notre Dame Press, Notre Dame, Indiana.

Hestenes, D. (1987). Toward a modeling theory of physics instruction. *American Journal of Physics*, 55(5):440–454.

Hestenes, D. (1992). Modeling games in the newtonian world. *American Journal of Physics*, 60(8):732–748.

Hestenes, D. (2003). Oersted medal lecture 2002: Reforming the mathematical language of physics. *American Journal of Physics*, 71(2):104–121.

Hewitt, P. G. (2006). *Conceptual Physics*. Pearson-Addison-Wesley, San Francicso, CA.

Hewitt, P. G. (2011). Equations as guides to thinking and problem solving. *The Physics Teacher*, 49(5):264.

Hoffmann, L., Häußler, P., und Lehrke, M. (1998). *Die IPN-Interessenstudie Physik*. IPN, Kiel.

Hudson, H. T. und McIntire, W. R. (1977). Correlation between mathematical skills and success in physics. *American Journal of Physics*, 45(5):470–471.

Häußler, P., Bünder, W., Duit, R., Gräber, W., und Mayer, J. (1998). *Naturwissenschaftsdidaktische Forschung. Perspektiven für die Unterrichtspraxis*. IPN, Kiel.

Häußler, P. und Lind, G. (1998). Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. BLK-Programm „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Modul 1.

Höttecke, D. (2001). Die Vorstellungen von Schülern und Schülerinnen von der „Natur der Naturwissenschaften“. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 7:7–23.

Kattmann, U., Duit, R., Gropengießer, H., und Komorek, M. (1997). Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion — Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 3(3):3–18.

Kirsch, A. (1987). *Mathematik wirklich verstehen*. Aulis Verlag Deubner, Köln.

Krey, O. und Mikelskis, H. F. (2009). Zur Rolle der Mathematik in der Physik aus Sicht von Physik-Lehramt-Studierenden. In: Höttecke, D. (Hrsg.), *Chemie- und Physikdidaktik für die Lehramtsausbildung. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik. Jahrestagung in Schwäbisch Gmünd 2008*, Berlin. LIT-Verlag.

Krey, O. und Mikelskis, H. F. (2010). Die Rolle der Mathematik in der Physik — Ergebnisse einer Schülerbefragung. PhyDid B — Didaktik der Physik — Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung, 2010.

Kuckartz, U. (2010). *Einführung in die computergestützte Analyse qualitativer Daten*. VS Verlag für Sozialwissenschaften / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden.

Lamnek, S. (2010). *Qualitative Sozialforschung*. Beltz Verlag, Weinheim, Basel.

Larkin, J., McDermott, J., Simon, D. P., und Simon, H. A. (1980). Expert and novice performance in solving physics problems. *Science*, 208:1335–1342.

Lederman, N. G. (2007). Nature of science: Past, present and future. In: Abell, S. K. und Lederman, N. G. (Hrsg.), *Handbook of Research on Science Education*, S. 831–880. Lawrence Earlbaum Associates, Mahwah, NJ.

Leisen, J. (2001). Qualitätsteigerung des Physikunterrichts durch Weiterentwicklung der Aufgabenkultur. *MNU*, 54(7):401–404.

Leisen, J. (2006). Aufgabenkultur im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. *MNU*, 59(5):260.

Lesh, R., Galbraith, P. L., Haines, C. R., und Hurford, A. (Hrsg.) (2010). *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies (ICTMA 13)*. Springer.

Malle, G. (1988). Die Entstehung neuer Denkgegenstände — untersucht am Beispiel der negativen Zahlen. In: Dörfler, W. (Hrsg.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung*, Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 16, S. 259–319. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

Matthews, M. R. (1992). History, philosophy and science education: The present rapproachment. *Science & Education*, 1(1):11–47.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken. 11. Auflage*. Beltz Verlag, Weinheim und Basel.

McComas, W., Almazroa, H., und Clough, M. P. (1998). The nature of science in science education: An introduction. *Science & Education*, 7(6):511–532.

Müller, R., Wodzinski, R., und Hopf, M. (Hrsg.) (2007). *Schülervorstellungen in der Physik*. Aulis Verlag Deubner, Köln.

Nersessian, N. (1992). How do scientists think? Capturing the dynamics of conceptual change in science. In: Giere, R. N. (Hrsg.), *Cognitive models of science*, S. 3–45. University of Minnesota Press, Minneapolis, MN.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40:1–24.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In: Gagatsis, A. und Papastavridis, S. (Hrsg.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, S. 115–124, Athens.

Onslow, B. (1988). Terminology: Its effect on children's understanding of the rate concept. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 10(4):19–30.

Orton, A. (1984). Understanding rate of change. *Mathematics in School*, 13(5):23–26.

Paty, M. (2003). The idea of quantity at the origin of the legitimacy of mathematization in physics. In: Gould, C. (Hrsg.), *Constructivism and Practice: Towards a Social and Historical Epistemology*, S. 109–135. Rowman and Littlefield, Lanham.

Pietrocola, M. (2008). Mathematics as structural language of physical thought. In: Vicentini, M. und Sassi, E. (Hrsg.), *Connecting Research in Physics Education with Teacher Education*. International Commission on Physics Education.

Poincaré, H. (1958). *The Value of Sciences*. Dover publications, New York.

Polya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press.

Pospiech, G. (2006). Promoting the competence of mathematical modeling in physics lessons. In: van den Berg, E., Ellermeijer, A. L., und Slooten, O. (Hrsg.), *Proceedings GIREP conference 2006: Modelling in Physics and Physics Education.*, S. 587–595, Amsterdam.

Pospiech, G. (2008). Mathematical constructs in the physical reality. In: Sriraman, B., Michelsen, C., Beckmann, A., und Freiman, V. (Hrsg.), *Interdisciplinary Educational Research in Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences*, S. 233–240. Information Age Publishing Inc.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül. Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In: Fritz, A. und Schmidt, S. (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I*, S. 213–234. Beltz-Verlag, Weinheim.

Prediger, S. (2010). „Aber wie sag ich es mathematisch?“ – Empirische Befunde und Konsequenzen zum Lernen von Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt. In: Höttecke, D. (Hrsg.), *Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik. Jahrestagung in Dresden 2009*, S. 6–20, Berlin. LIT-Verlag.

Rebello, N. S., Cui, L., Benett, A. G., Zollman, D. A., und Ozimek, D. J. (2007). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. In: Jonassen, D. (Hrsg.), *Learning to Solve Complex Scientific Problems*. Lawrence Earlbaum Associates, New York.

Redhead, M. (1980). Models in physics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 31(2):145–163.

Redish, E. F. (2006). Problem solving and the use of math in physics courses. *ArXiv Physics e-prints*.

Redish, E. F. und Bing, T. J. (2009). Using math in physics: Warrants and epistemological frames. In: Raine, D., Hurkett, C., und Rogers, L. (Hrsg.), *Physics Community and Cooperation - Volume 2. GIREP-EPEC & PHEC 2009 International Conference*, Leicester.

Redish, E. F. und Gupta, A. (2010). Making meaning with math in physics: A semantic analysis. *ArXiv Physics e-prints*.

Reif, F., Larkin, J. H., und Brackett, G. C. (1976). Teaching general learning and problem-solving skills. *American Journal of Physics*, 44(3):212.

Rivadulla, A. (2005). Theoretical explanations in mathematical physics. In: Boniolo, G., Budinich, P., und Trobok, M. (Hrsg.), *The Role of Mathematics in Physical Sciences*, S. 161–178. Springer, Dordrecht.

Schroedel (2006). *Spektrum Physik 9. Schülerband. Gymnasium Sachsen.* Westermann Schroedel Diesterweg, Braunschweig.

Sedlmeier, P. und Renkewitz, F. (2008). *Forschungsmethoden und Statistik in der Psychologie*. Pearson Studium, München.

Sherin, B. L. (2001). How students understand physics equations. *Cognition and Instruction*, 19(4):479–541.

Singley, M. K. und Anderson, J. R. (1989). *The Transfer of Cognitive Skill*. Harvard University Press, Cambridge, MA.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77:20–26.

Skemp, R. R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books.

Skemp, R. R. (1993). *SAIL through Mathematics, Volume 1*. EEC Ltd., Calgary.

Skemp, R. R. (1994). *SAIL through Mathematics, Volume 2*. EEC Ltd., Calgary.

Steiner, M. (1998). *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

Taşar, M. F. (2010). What part of the concept of acceleration is difficult to understand: the mathematics, the physics, or both? *ZDM Mathematics Education*, 42:469–482.

Thompson, P. W. und Thompson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually, part i: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(3):279–303.

Tuminaro, J. und Redish, E. F. (2007). Elements of a cognitive model of physics problem solving: Epistemic games. *Physical Review Special Topics — Physics Education Research*, 3(2).

Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M., und Pospiech, G. (2012). Modelling mathematical reasoning in physics education. *Science & Education*, 21(4):485–506.

Ullmann, M. (2011). Schülerstrategien beim Lösen quantitativer Physikaufgaben. Analyse eines Beispiels. Wissenschaftliche Hausarbeit, Technische Universität Dresden, Dresden.

van den Berg, E., Ellermeijer, A. L., und Slooten, O. (Hrsg.) (2006). *Proceedings GIREP conference 2006: Modelling in Physics and Physics Education*, Amsterdam.

van Someren, M. W., Barnard, Y. F., und Sandberg, J. A. (1994). *The Think Aloud Method: A Practical Guide to Modelling Cognitive Processes*. Academic Press, London.

vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematikdidaktik*, 13(4):345–364.

von Aufschnaiter, C. und von Aufschnaiter, S. (2001). Eine neue Aufgabenkultur für den Physikunterricht. *MNU*, 54(7):409–416.

Walsh, L. N., Howard, R. G., und Bowe, B. (2007). Phenomenographic study of students' problem solving approaches in physics. *Physical Review Special Topics — Physics Education Research*, 3(2).

Wells, M., Hestenes, D., und Swackhamer, G. (1995). A modeling method for high school physics instruction. *American Journal of Physics*, 63(7):606–619.

Widodo, A. und Duit, R. (2004). Konstruktivistische Sichtweisen vom Lehren und Lernen und die Praxis des Physikunterrichts. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 10:233–255.

Wiesner, H., Schecker, H., und Hopf, M. (Hrsg.) (2011). *Physikdidaktik kompakt*. Aulis Verlag.

Wigner, E. P. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(1):1–14.

Zahar, E. (1980). Einstein, Meyerson and the role of mathematics in physical discovery.

The British Journal for the Philosophy of Science, 31(1):1–43.

Zemanian, A. H. (1987). *Distribution Theory and Transform Analysis: An Introduction to Generalized Functions, with Applications*. Dover Publications Inc.